



Extensiones del paradigma multiadjunto: programación lógica con multirretículos y aplicaciones al análisis formal de conceptos

DOCTORANDO: Jorge Ruiz Calviño

DIRECTORES: Jesús Medina Moreno y Manuel Ojeda Aciego

Dept. Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Resumen El objetivo de esta tesis es la de generalizar el ámbito del marco multiadjunto presentado en [6]. Por una parte, utilizamos la estructura algebraica de multirretículo para extender el paradigma de programación lógica difusa a un contexto de mayor generalidad que, en cualquier caso, se da de manera natural en numerosas situaciones; por otra parte, proponemos la introducción de lo multiadjunto en la teoría de análisis de conceptos difusos con el fin de dar una mayor expresividad al lenguaje, satisfaciendo así con mayor facilidad las necesidades planteadas en la vida real y generalizando las distintas definiciones de retículos de conceptos difusos existentes en la bibliografía.

1 Introducción

Este trabajo se enmarca en el área de la matemática aplicada a la informática, concretamente dentro de los *fundamentos lógico-matemáticos* y el *análisis de datos*. La primera parte de la tesis se concentra en el campo de la teoría de la programación lógica, mientras que la segunda entra dentro del ámbito del análisis formal de conceptos.

El paradigma multiadjunto que aparece citado en el título de esta tesis tiene su origen en una generalización de la teoría de la programación lógica en contextos borrosos. En el trabajo [3] se introdujo un marco de trabajo general con la idea de abstraer los detalles particulares de cada paradigma y centrarse nada más en los mínimos elementos que permitan su ejecutabilidad, dando lugar a la programación monótona y residuada, en la que como conjunto de valores de verdad se considera con la estructura de retículo residuado completo.

Más recientemente, en [14] se introdujo una nueva estructura con la idea de abarcar el mayor número posible de paradigmas de la programación lógica generalizada. Esta nueva estructura es la de los retículos multiadjuntos, que generalizan tanto a las álgebras de implicación como a los retículos residuados, naciendo así lo que se denomina programación lógica multiadjunta y, más generalmente, el paradigma multiadjunto.

2 Programación Lógica con Multirretículos

En el estudio semántico de la programación lógica multiadjunta, el interés principal recae en la semántica de punto fijo de los programas lógicos, para lo cual resulta fundamental el considerar el operador de consecuencias inmediatas $T_{\mathbb{P}}$, pues permite relacionar la semántica declarativa (la teoría de modelos generada por la semántica) y la semántica operacional (generada por la teoría de la demostración). De este modo, el significado de un programa \mathbb{P} se interpreta como el menor punto fijo del operador $T_{\mathbb{P}}$ (su modelo mínimo).

En la primera parte de la tesis se extiende la teoría de la programación lógica multiadjunta para acomodar multirretículos residuados como conjunto subyacente de los valores de verdad, creando una nueva teoría en la que aún se puede obtener una semántica de punto fijo.

La estructura de multirretículo usada difiere de la de retículo a la hora de considerar que todo par de elementos tiene cota superior *mínima* y cota inferior *máxima*; estas condiciones se debilitan exigiendo nada más la existencia de cotas superiores *minimales* y de cotas inferiores *maximales*. Esta diferencia afecta también a la definición del operador de consecuencias inmediatas $T_{\mathbb{P}}$, ya que al no existir necesariamente los supremos hay que adaptar su definición con el fin de desarrollar una semántica de punto fijo para este nuevo paradigma.

La consideración de cotas superiores minimales y cotas inferiores maximales afecta en el sentido de que ya no existe necesariamente modelo mínimo, sino modelos minimales para un programa lógico dado. Sin embargo, este hecho no afecta a la computabilidad de los mismos, ya que se demuestra que es posible alcanzar todos los modelos minimales.

Por otra parte, se recuerda y extiende parcialmente la teoría de ideales para los multirretículos, con el fin de plantear una semántica de ideales en multirretículos que tenga las mismas características que la semántica de ideales en retículos, en el sentido de si se pueden alcanzar modelos minimales a partir de los modelos de la semántica de ideales. La estructura del conjunto de cierto tipo de ideales de los multirretículos es, en general, de retículo completo, lo que permite el uso del paradigma multiadjunto para calcular su modelo mínimo, y luego ver si se pueden alcanzar modelos minimales a partir de este modelo mínimo.

Para finalizar la primera parte, se presenta una condición necesaria para la continuidad del operador $T_{\mathbb{P}}$. Esta condición es importante desde el punto de vista computacional, ya que asegura la obtención de puntos fijos en no más de ω iteraciones. Con tal fin, se inicia el estudio de la teoría de multifunciones en multirretículos, ya que $T_{\mathbb{P}}$ resulta ser una multifunción definida en el multirretículo de las interpretaciones.

3 Retículo de conceptos multiadjuntos

En la segunda parte de la tesis, se aplica el paradigma multiadjunto al análisis formal de conceptos, una disciplina que lleva más de dos décadas surtiendo de herramientas conceptuales al análisis de datos, y goza de numerosas aplicaciones de interés.

Una de estas herramientas consiste en la visualización de los datos en forma de retículos de conceptos y así hacerlos más transparentes para su uso. Otra herramienta importante que proporciona es la de un método de “exploración interactiva de atributos”, lo que permite la adquisición de conocimiento a través de un experto mediante la formulación de preguntas precisas las cuales se confirmarán o se refutarán por medio de un contraejemplo.

El término de análisis de conceptos difuso fue introducido en [2] donde por primera vez se utiliza un retículo con una conorma y una negación como base para formalizar con qué grado posee un objeto un atributo y la relación existente entre ellos, introduciendo ya la imprecisión dentro de esta teoría. Este trabajo fue desarrollado de forma independiente en [15]. Más tarde, en [1], se extendieron estos resultados para el caso de un retículo residuado donde el conjuntor considerado es conmutativo, además de utilizar relaciones difusas de igualdad. Este trabajo fue mejorado posteriormente, en el caso de la igualdad clásica, por [5] que introdujo el retículo de conceptos generalizado, en el cual en vez de considerar el mismo retículo para los objetos, atributos y la relación existente entre ellos, se utiliza un retículo distinto para cada uno de ellos. Esta consideración, permite una mayor expresividad a la hora de representar las necesidades del mundo real. Por último, en trabajos como [4] se consideró la noción de retículo de conceptos difuso para conjuntores no conmutativos. Los autores utilizan un retículo birresiduado como

base donde se utilizan las dos implicaciones dadas para el retículo para formar los conceptos y así definir un nuevo retículo de conceptos.

En la tesis se plantea una nueva estructura en la teoría de análisis de conceptos siguiendo la idea de considerar distintos retículos para los objetos, atributos y la relación existente entre ellos, esto da lugar a lo que se denominará retículo de conceptos multiadjuntos.

Los bloques básicos de los retículos de conceptos multiadjuntos serán los *triples adjuntos*, que son generalizaciones de los pares adjuntos en el caso en el que el conjuntor sea no conmutativo. La no conmutatividad del conjuntor $\&$ nos proporciona dos formas diferentes de generalizar la propiedad de adjunción dependiendo de qué argumento del conjuntor sea fijado.

Los retículos de conceptos multiadjuntos resultan ser de gran utilidad a la hora de expresar preferencias, ya que nos permite clasificar los objetos y/o atributos distintos subgrupos; una vez ya hecha esta clasificación, podemos dar mayor peso a unos con respecto de otros conforme a las preferencias que tenga el usuario en ese momento. Con este fin, se muestra mediante un ejemplo específico cómo se puede utilizar esta nueva estructura con el fin de dar mayor expresividad al lenguaje, y ser más específicos a la hora de plantear nuestras preferencias. A su vez, para este nuevo marco se presenta un teorema de representación del estilo de los existentes para los demás con el fin de caracterizar qué retículos son isomorfos a los retículos de conceptos multiadjuntos.

En la última sección de la tesis, se compara el retículo de conceptos multiadjunto con los restantes retículos de conceptos difusos, mostrándose como un paradigma general que permite considerarlos como un caso particular.

References

- [1] R. Bělohávek. Concept lattices and order in fuzzy logic. *Annals of Pure and Applied Logic*, 128:277–298, 2004. doi: 10.1016/j.apal.2003.01.001.
- [2] A. Burusco and R. Fuentes-González. The study of L -fuzzy concept lattice. *Mathware & Soft Computing*, 3:209–218, 1994.
- [3] C. V. Damásio and L. M. Pereira. Hybrid probabilistic logic programs as residuated logic programs. In *Logics in Artificial Intelligence, JELIA '00*, pages 57–73. Lect. Notes in Artificial Intelligence 1919, 2000.
- [4] G. Georgescu and A. Popescu. Concept lattices and similarity in non-commutative fuzzy logic. *Fundamenta Informaticae*, 55(1):23–54, 2002.
- [5] S. Krajčí. A generalized concept lattice. *Logic Journal of IGPL*, 13(5):543–550, 2005. doi: 10.1093/jigpal/jzi045.
- [6] J. Medina. *Retículos Multi-adjuntos y teoremas de continuidad para el operador de consecuencias*. PhD thesis, Universidad de Málaga, 2001.
- [7] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Formal concept analysis via multi-adjoint concept lattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:130–144, 2009. doi: 10.1016/j.fss.2008.05.004.
- [8] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Relating generalized concept lattices and concept lattices for non-commutative conjunctors. *Appl. Math. Lett.*, 21:1296–1300, 2008. doi: 10.1016/j.aml.2007.12.026.
- [9] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Fuzzy logic programming via multilattices. *Fuzzy Sets and Systems*, 158(6):674–688, 2007.
- [10] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. A Fixed-Point Theorem for Multi-valued Functions with an Application to Multilattice-Based Logic Programming. *Lect. Notes in Artificial Intelligence*, 4578:37–44, 2007. doi: 10.1007/978-3-540-73400-0₅.

-
- [11] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. On Reachability of Minimal Models of Multilattice-Based Logic Programs. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*, 4827:271–282, 2007. doi: 10.1007/978-3-540-76631-5₂₆.
- [12] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. On Multi-adjoint Concept Lattices: Definition and Representation Theorem. *Lecture Notes in Computer Science*, 4390:197–209, 2007. doi: 10.1007/978-3-540-70901-5.
- [13] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and J. Ruiz-Calviño. Multi-lattices as a Basis for Generalized Fuzzy Logic Programming. *Lect. Notes in Artificial Intelligence*, 3849:61–70, 2006. doi: 10.1007/11676935₈.
- [14] J. Medina, M. Ojeda-Aciego, and P. Vojtáš. Multi-adjoint logic programming with continuous semantics. In *Logic Programming and Non-Monotonic Reasoning, LPNMR'01*, pages 351–364. Lect. Notes in Artificial Intelligence 2173, 2001.
- [15] S. Pollandt. *Fuzzy Begriffe*. Springer, Berlin, 1997.