

Geometric Constraint Solving

Robert Joan-Arinyo, Antoni Soto, Sabastià Vila

Universitat Politècnica de Catalunya
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial
Avda. Diagonal 647, 8, 08028 Barcelona

e-mail: {robert,tonis,sebas}@lsi.upc.es

Nowadays the design and manufacture of industrial products is an increasingly competitive market. In this setting, the Computer-Aided Design and Manufacture (CAD/CAM) systems must help to improve efficiency and to significantly shorten the design-to-manufacture cycle. To achieve this goal, CAD/CAM systems should provide tools to capture the design intent and support for conceptual design. Contemporary CAD/CAM systems capture the design intent partially by defining functional relationships between dimensional variables, that is, parametric design, and geometric constraint-based design. In this paper we review the basic concepts concerning geometric problems defined by constraints and the main methods reported in the literature to solve them. We will illustrate these concepts by detailing an specific constructive geometric constraint solver.

Resolución de Restricciones Geométricas

Robert Joan-Arinyo, Antoni Soto, Sebastià Vila

Universitat Politècnica de Catalunya
Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial
Avda. Diagonal 647, 8
08028 Barcelona
{robert,tonis,sebas}@lsi.upc.es

Resumen

El actual mundo del diseño y manufactura de bienes y productos se caracteriza por una elevada competitividad. En este contexto, para que los sistemas de Diseño y Manufactura Asistidos por Computador (CAD/CAM) sean efectivos deben ser capaces de ofrecer herramientas que acorten el ciclo diseño-manufactura-rediseño. Entre las herramientas necesarias, los sistemas CAD/CAM deben poder capturar tanto la geometría del diseño como lo que se ha dado en llamar *la intención* del diseñador, es decir, los deseos del diseñador. Los sistemas CAD/CAM de última generación capturan dicha intención, en parte, aplicando los conceptos conocidos como *modelado paramétrico* y *diseño basado en restricciones*. En este trabajo presentamos los conceptos básicos subyacentes en la definición de problemas geométricos mediante restricciones en un espacio de dos dimensiones, así como las metodologías más extendidas que los resuelven. Ilustraremos los principios presentando un caso concreto de sistema de resolución de restricciones geométricas basado en una técnica constructiva.

Palabras clave: Restricciones geométricas, Modelado geométrico, Diseño paramétrico.

1. Introducción

Los sistemas de Diseño Asistido por Computador (CAD) basados en el paradigma de *diseño mediante características* se desarrollaron con la intención de capturar la llamada *intención del diseñador*. El objetivo es que la representación almacene información que permita interpretar los deseos del diseñador y, a partir de ella, realizar razonamientos sobre el diseño en curso. Desde el punto de vista del usuario, estos sistemas aumentan su eficacia cuando se les dota de capacidad de diseño paramétrico basado en restricciones geométricas.

En el diseño basado en restricciones geométricas, el usuario esboza un croquis que define de manera aproximada la forma del objeto que se de-

sea diseñar y, en algún momento del proceso, el usuario anota el croquis con un conjunto de restricciones que definen de manera precisa el objeto deseado. Será el sistema informático el encargado de elucidar si el objeto está o no está bien definido. Caso de estar bien definido, el sistema generará alguna representación que permitirá la construcción efectiva del objeto. Un componente, usualmente conocido con el término *solver*, juega un papel importante en los sistemas CAD basados en restricciones, puesto que será el encargado de resolverlas.

En general, las variables de los problemas definidos mediante restricciones geométricas (distancias, ángulos, etc) toman valores en dominios continuos. Y el objetivo final es encontrar, si es posible, un conjunto de coordenadas que posicio-

nen los elementos geométricos que componen el objeto de manera tal que se cumplan todas las restricciones. Así pues, desde el punto de vista de Programación de Restricciones, la resolución de los problemas definidos mediante restricciones geométricas pertenece a la familia de Resolución de Restricciones.

Los métodos propuestos para resolver problemas definidos mediante restricciones geométricas son diversos y variados y pueden agruparse en tres grandes familias: ecuacionales, constructivos y de análisis de grados de libertad. Ninguno de ellos es suficientemente general, eficiente y robusto como para que sea aplicable en todos los casos.

El resto del artículo se estructura como sigue. En la Sección 2 definiremos de manera precisa el problema a resolver. La Sección 3 realiza un repaso sintético de los diferentes métodos utilizados en la resolución del problema de restricciones geométricas. Finalmente, la Sección 4 presenta, a grandes rasgos, un caso concreto de solver basado en una técnica constructiva, que puede caracterizarse de manera adecuada según los conceptos de Satisfacción de Restricciones.

2. El Problema de la Resolución de Restricciones Geométricas

Un problema definido mediante restricciones geométricas se caracteriza mediante una tupla (E, O, X, C) donde

- E es el espacio geométrico considerado, dotado de un sistema de referencia y usualmente euclídeo.
- O es el conjunto de objetos geométricos concretos que configuran el problema, escogidos dentro de un repertorio prefijado.
- X es un conjunto, posiblemente vacío, de variables a determinar. Las variables pueden referirse a elementos geométricos o representar conceptos no necesariamente geométricos. En el segundo caso se denominan variables *externas*.
- C es el conjunto de restricciones. Pueden ser geométricas o ecuacionales. Las restricciones geométricas pertenecen a un conjunto predeterminado de tipos y siempre involucran o bien un parámetro del problema o

bien una variable que denominamos *dimensional*. El conjunto de restricciones ecuacionales puede ser vacío.

El problema de la resolución de un problema definido mediante restricciones se puede enunciar como

Dado un problema de restricciones geométricas (E, O, X, C) ,

1. ¿Quedan determinadas de manera coherente las posiciones relativas de los elementos geométricos en O de manera tal que se cumplan las restricciones C ? En caso afirmativo,
2. Si se asignan valores a las restricciones evaluadas y a las variables externas, ¿existe alguna construcción real sobre los elementos geométricos que cumpla todas las restricciones y ecuaciones?

A la hora de enfrentarse con problemas geométricos definidos mediante restricciones, la primera cuestión que debe decidirse es la dimensión del espacio de trabajo E . Si bien el estudio del problema de la resolución de restricciones geométricas en $E = \mathbb{R}^3$, ha obtenido un éxito notable, todavía quedan por resolver numerosos problemas interesantes. Por ejemplo, la caracterización del dominio de las diferentes técnicas conocidas.

El problema en $E = \mathbb{R}^3$, aplicable en áreas tales como planificación de movimiento de robots, modelado molecular, representación del terreno y demostración automática de teoremas, presenta grandes dificultades tanto de conceptualización como de resolución efectiva y, hasta ahora, el avance ha sido mínimo. Trabajos pioneros en este campo pueden consultarse en Hoffmann y Vermeer, [31, 32] y Durand, [16]. En lo que sigue nos ceñiremos a problemas bidimensionales.

2.1. El Problema General

La Figura 1 ilustra un caso de problema de resolución de restricciones geométricas en \mathbb{R}^2 en su forma más general con, por ejemplo, un repertorio de tipos de elementos geométricos compuesto por puntos, rectas, círculos y arcos de círculo de radio dado. Los elementos concretos que componen el problema son:

- El conjunto de elementos geométricos, $O = \{A, B, C, D, L_{AB}, L_{AC}, L_{BC}\}$.

- Un conjunto de parámetros de restricciones $P = \{d, h, \alpha\}$.
- Un conjunto de variables dimensionales $V_1 = \{x, y\}$.
- Un conjunto de variables externas $V_2 = \{v\}$.
- Un conjunto de restricciones parametrizadas, $C_1 = \{dpp(A, B) = d, dpl(C, L_{AB}) = h, \text{ang}(L_{AB}, L_{BC}) = \alpha\}$.
- Un conjunto de restricciones cuyos valores son variables, $C_2 = \{dpp(A, B) = x, dpp(A, C) = y\}$.
- Un conjunto de ecuaciones establecidas entre variables, $C_3 = \{y = x \cdot v, v = 0,5 \cos(\alpha)\}$.

con $X = V_1 \cup V_2$ y $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

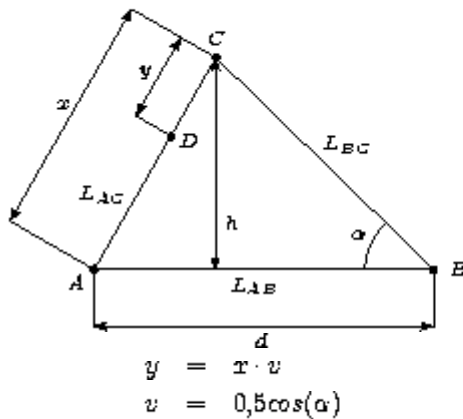


Figura 1. Resolución de restricciones geométricas. El problema general en \mathbb{R}^2 .

El problema así planteado presenta determinadas dificultades que caen fuera del ámbito de la presente monografía. El lector interesado en el tema puede consultar los trabajos de Hoffmann y Joan-Arinyo, [26] y de Joan-Arinyo y Soto, [40].

2.2. El Problema Básico

El problema básico no considera ni variables externas, ni restricciones con valor desconocido, ni relaciones ecuacionales. Solamente considera elementos geométricos y restricciones evaluadas establecidas entre ellos. La definición precisa es como sigue.

Dados un conjunto de n elementos geométricos y un conjunto de m restricciones geométricas definidas entre ellos:

1. ¿Quedan determinadas de manera coherente las posiciones relativas de los n elementos geométricos? En caso afirmativo,
2. Si se asignan valores a las m restricciones, ¿existe alguna construcción real sobre los n elementos que cumpla todas las restricciones?

La Figura 2 muestra un ejemplo de problema de restricciones geométricas básico que define un popular mecanismo conocido como sistema biela-manivela, [15].

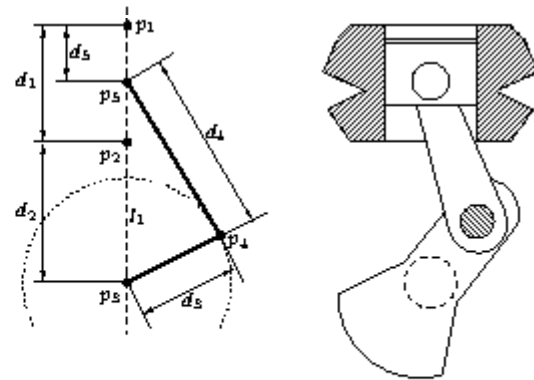


Figura 2. Sistema biela-manivela y el mecanismo real.

El mecanismo transforma el movimiento lineal del punto p_3 a lo largo de la línea recta t_1 , en un movimiento circular del punto p_4 según el círculo con centro en el punto p_3 y radio d_3 . El sistema biela-manivela puede representarse como un problema de restricciones geométricas formado por cinco puntos, $p_i, 1 \leq i \leq 5$, más una línea recta t_1 . El conjunto de restricciones son las dadas en la Figura 3 que incluye distancias entre puntos $dpp()$ y coincidencias $on()$.

- | | |
|--------------------------|-------------------|
| 1. $dpp(p_1, p_2) = d_1$ | 6. $on(p_1, t_1)$ |
| 2. $dpp(p_3, p_3) = d_2$ | 7. $on(p_2, t_1)$ |
| 3. $dpp(p_3, p_4) = d_3$ | 8. $on(p_3, t_1)$ |
| 4. $dpp(p_4, p_5) = d_4$ | 9. $on(p_5, t_1)$ |
| 5. $dpp(p_1, p_5) = d_5$ | |

Figura 3. Restricciones geométricas para el problema biela-manivela.

En lo que sigue solamente consideraremos el problema básico.

2.3. Grafos de Restricciones Geométricas

En las condiciones dadas en la sección precedente, un problema de restricciones geométricas puede representarse mediante un *grafo de restricciones geométricas*, $G = (V, E)$, en el que los vértices V son los elementos geométricos y las aristas E son las restricciones, [63]. Los grafos de restricciones geométricas son grafos no orientados, sin ciclos con un único vértice y sin aristas múltiples definidas sobre un mismo par de vértices. Se asume que, como mínimo, un grafo de restricciones tiene dos vértices.

La Figura 4 representa el grafo de restricciones geométricas correspondiente al problema del sistema biela-manivela dado en la Figura 2.

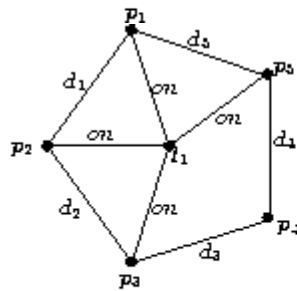


Figura 4. Restricciones geométricas para el problema biela-manivela.

Como veremos en la Sección 3, el grafo de restricciones geométricas juega un importante papel en muchos de los métodos de resolución de restricciones geométricas.

2.4. Categorización de los Problemas

La comunidad de CAD/CAM está principalmente interesada en diseñar y manufacturar objetos que son invariantes bajo transformaciones rígidas de translación y rotación, propiedad que se conoce con el nombre de *rigidez*.

El concepto intuitivo de rigidez, que será el que presentaremos aquí, se deriva a partir del número de soluciones que admite el problema conside-

rado. En este contexto, los problemas definidos mediante restricciones geométricas se categorizan según tres familias: infrarrestingidos, bien restringidos y sobrerrestingidos.

Son problemas infrarrestingidos aquellos en los que el número de soluciones es infinito, es decir, los objetos definidos no son rígidos. Los problemas bien restringidos son los que tienen un número de soluciones no nulo y finito. Son los objetos propiamente rígidos. Los problemas sobrerrestingidos son aquellos para los que no existe solución.

Así definido, el concepto de rigidez es sencillo pero resulta extraordinariamente elusivo cuando se intenta definir de manera rigurosa. En efecto. Tal como se han definido, las categorías solo hacen referencia a la estructura del problema y no tienen en cuenta otras cuestiones como, entre otras, las situaciones inconsistentes en las que valores específicos asignados a las restricciones pueden originar un cambio de categoría. Por ejemplo, que un problema bien restringido pueda pasar a ser infrarrestingido. En el problema dado en la Figura 5, véase Fudos y Hoffmann, [20], la posición del vértice P está bien definida siempre que $\alpha + \beta \neq 90^\circ$. Pero si $\alpha + \beta = 90^\circ$, la posición de P es indeterminada y, por tanto, el objeto deja de ser rígido.

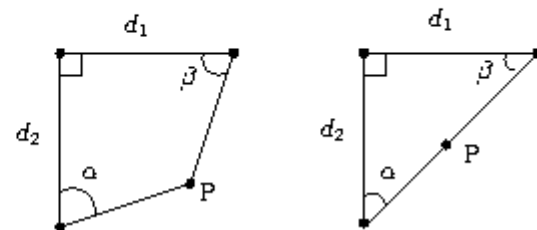


Figura 5. Izquierda: Configuración general. Derecha: Configuración degenerada para $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Un estudio exhaustivo de las diferentes caracterizaciones formales de rigidez que se han publicado está fuera de lugar. El lector interesado puede encontrar las más antiguas, de las que tenemos noticia, en Henneberg, [23] y Laman, [52]. Otras caracterizaciones más recientes pueden encontrarse en Graver *et al.* [21], Hoffmann *et al.*, [27], y Whitley, [78, 79].

3. Métodos de Resolución

En esta sección presentamos un breve resumen de algunos de los métodos de resolución de restricciones geométricas que han sido publicados hasta el momento. Para una revisión en profundidad del área véase el trabajo de Duran, [16], de Jermann, [35], y las referencias allí incluidas.

3.1. Clasificación y Propiedades

Clasificamos los métodos de resolución de restricciones geométricas en tres grandes grupos: ecuacionales, constructivos y basados en el análisis de grados de libertad. Un tipo de problema íntimamente ligado a la resolución de restricciones geométricas es la demostración de teoremas geométricos. Aunque este problema no suele incluirse explícitamente en las categorías precedentes, incluiremos una breve descripción del mismo.

Entre las propiedades deseables que los métodos de resolución de restricciones geométricas deben poseer, destacamos las siguientes:

1. *Consistencia.* Un método es consistente si obtiene una solución sólo cuando ésta existe.
2. *Complejidad.* Un método es completo si permite resolver cualquier problema. Para los métodos incompletos, debe valorarse si existe alguna caracterización del dominio del método.
3. *Solución previsible.* Un método permite obtener soluciones previsible cuando ofrece control sobre la instancia solución que obtiene. Las restricciones geométricas pueden interpretarse como sistemas de ecuaciones, en general no lineales, que tienen un número de soluciones exponencial en el número de variables, [62]. Por lo tanto, es fundamental que los métodos de resolución de restricciones geométricas ofrezcan mecanismos que permitan seleccionar las distintas instancias solución.
4. *Sentido geométrico.* Un método conserva el sentido geométrico si la solución se puede expresar como una secuencia de construcciones geométricas.
5. *Corrección.* Un método es correcto si siempre acaba y, además, cuando obtiene una

solución, ésta satisface todas las restricciones.

6. *Robustez.* Un método es robusto si obtiene una solución exacta. En caso contrario, se valora si puede hacerse alguna estimación de la sensibilidad del método a las imprecisiones introducidas por las situaciones concretas degeneradas y el cálculo en coma flotante.
7. *Independencia de la dimensión.* Un método es independiente de la dimensión si es correcto en el espacio euclídeo de dimensión n , para cualquier n .
8. *Restricciones simbólicas.* Un método permite tratar restricciones simbólicas si resuelve el problema general donde aparecen restricciones geométricas simbólicas, variables externas y ecuaciones.
9. *Eficiencia.* La eficiencia mide el coste computacional del método.

Para cada uno de los métodos que se describen a continuación, detallaremos cuales de estas propiedades les son aplicables.

3.2. Métodos Ecuacionales

En los métodos ecuacionales, las restricciones geométricas se representan mediante ecuaciones, de manera que se obtiene un sistema de ecuaciones, en general, no lineales. Posteriormente, el sistema de ecuaciones se resuelve aplicando alguna técnica conocida.

Los métodos ecuacionales admiten restricciones simbólicas porque éstas se expresan de manera natural como ecuaciones y son métodos independientes de la dimensión.

El cambio de representación produce la pérdida del sentido geométrico del problema. Además, los problemas bien restringidos dan lugar a sistemas de ecuaciones indeterminados, ya que las restricciones definen las posiciones relativas de los elementos geométricos y, por lo tanto, quedan por fijar los grados de libertad correspondientes a una translación y una rotación del objeto rígido.

Los métodos ecuacionales, a su vez, pueden clasificarse en función de las técnicas específicas de resolución de los sistemas de ecuaciones. A continuación describimos algunas de estas familias con mayor detalle.

3.2.1. Métodos numéricos

Los métodos numéricos iterativos permiten resolver grandes sistemas de ecuaciones no lineales. En general, deben partir de una buena aproximación a una solución para garantizar la convergencia del método. Esto implica que si, como es usual, los valores iniciales se toman de un croquis definido en la interacción con el usuario, entonces el croquis debe cumplir la mayor parte de las restricciones. Normalmente, se tiene poco control sobre la instancia solución a la cual convergen.

Otro problema inherente a los métodos numéricos iterativos es que, para que sean robustos, deben ser cuidadosamente programados.

El método de *relajación*, [73], se usa en [5, 25] como alternativa a los métodos de propagación. El método de relajación consiste en perturbar los valores de las variables de manera que se minimice el error global. La convergencia es lenta en general.

El método numérico más usado es el de *Newton-Raphson*, [44]. Este método se usa en los sistemas descritos en [24, 57, 58, 61]. Newton-Raphson es un método local por lo que, caso de converger, lo hace más rápidamente que el de relajación. Este método no es aplicable a sistemas sobrerrestringidos consistentes.

Los métodos de *homotopia* o *continuación*, [2], son métodos globales, propiedad que garantiza la convergencia, y son exhaustivos, es decir, permiten obtener todas las soluciones. Sin embargo, son menos eficientes que el método de Newton-Raphson. Lamure, [53], aplica este método para la resolución de restricciones geométricas.

También se han propuesto métodos menos convencionales. Por ejemplo, Hel-Or *et al.*, [22], introducen el método, llamado *diseño paramétrico relajado*, basado en estimar los grados de libertad de un sistema de ecuaciones por aplicación de la técnica del filtrado de Kalman, tomada de la teoría de control. La técnica del filtrado de Kalman, si bien suele usar estimadores no lineales, se desarrolló fundamentalmente en teoría de control de sistemas lineales y su aplicación a sistemas no lineales no permite asegurar que se encontrará una solución, aunque exista.

Kin *et al.*, [45], proponen un método numérico basado en máquinas de Boltzmann extendidas que son una especie de red neuronal que se usa para minimizar una función polinómica de energía.

3.2.2. Métodos Simbólicos

Los métodos simbólicos algebraicos calculan las bases de Gröbner del sistema de ecuaciones. Entre los algoritmos para el cálculo de las bases de Gröbner destacamos el de Buchberger, [11], y el de Wu-Ritt, [12, 81]. Estos métodos, esencialmente, transforman el sistema de ecuaciones polinómicas inicial en un sistema de forma triangular cuyas soluciones son las mismas que las soluciones del sistema inicial.

Buchanan *et al.*, [10], describen un sistema en el cual el método de resolución de restricciones geométricas aplicado es el algoritmo de Buchberger. Kondo, [47], intenta subsanar los problemas inherentes a la su propuesta inicial [46] usando métodos simbólicos algebraicos para obtener un polinomio que caracterice las modificaciones realizadas sobre un modelo.

3.2.3. Métodos de Propagación

Los métodos de propagación representan los sistemas de ecuaciones mediante un grafo simétrico en el que los vértices del grafo son las variables y las ecuaciones, y las aristas del grafo representan las ocurrencias de las variables en las ecuaciones. Intentan orientar el grafo de manera que cada vértice que representa una ecuación sea un vértice final de todas las aristas que confluyen en él excepto una. Si se consigue orientar el grafo, entonces existe una solución incremental, es decir, una triangulación del sistema de ecuaciones. Para orientar el grafo se usan diferentes técnicas, como la propagación de grados de libertad o la propagación de valores conocidos, [17, 65, 75]. Los métodos de propagación no garantizan que se encuentre la solución cuando existe alguna por lo que, normalmente, cuando fallan, es decir, cuando la orientación del grafo produce ciclos, se combinan con métodos numéricos, [5, 51, 69, 73]. Otras aproximaciones aplican transformaciones sobre el grafo para intentar romper ciclos [75].

En [56], Leler describe los métodos de propagación con todo detalle y propone una nueva herramienta que denomina *reescritura aumentada de términos*. Esta herramienta esencialmente consiste en un sistema de reescritura clásico a la que se añaden asociaciones entre átomos y valores, objetos y tipos. Destaca entre los ejemplos de uso de la nueva herramienta la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales.

Borning *et al.*, [4], han propuesto un algoritmo de propagación local con restricciones de desigualdad.

3.2.4. Técnicas de Análisis de Sistemas de Ecuaciones

Las técnicas de análisis de sistemas de ecuaciones permiten determinar si un sistema de ecuaciones es sobre-determinado, indeterminado o bien determinado teniendo en cuenta únicamente la estructura del sistema. Estas técnicas se pueden extender para calcular la descomposición de un sistema de ecuaciones según un conjunto de componentes minimales resolubles independientemente, [60, 71].

Estas técnicas se pueden usar como preproceso de cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones con la finalidad de reducir el número de variables y ecuaciones a resolver simultáneamente.

Serrano, [66], usa parcialmente técnicas de análisis de sistemas de ecuaciones para, a partir de un conjunto de restricciones candidatas, seleccionar un subconjunto consistente de restricciones que hagan resoluble el problema.

3.3. Métodos Constructivos

En principio, los métodos constructivos se desarrollaron para intentar resolver una subclase bien caracterizada de problemas definidos mediante restricciones geométricas: aquellos que fueran resolubles por aplicación de un conjunto de reglas constructivas predefinido, por ejemplo, operaciones con regla y compás.

Estos métodos permiten obtener una solución simbólica expresada como una secuencia de operaciones geométricas básicas, tales como intersecciones entre círculos y rectas. Dado que la solución obtenida es constructiva, estos métodos conservan el sentido geométrico de la información involucrada. Además, la secuencia de operaciones geométricas es una forma sintética de representar un número posiblemente exponencial de soluciones. Las diferentes instancias solución se pueden determinar seleccionando soluciones alternativas cuando se evalúen las operaciones geométricas básicas. En principio, sólo resuelven restricciones evaluadas.

Clasificamos los métodos constructivos en función

de la técnica utilizada en el análisis del problema. Se denominan métodos de *composición* aquellos métodos constructivos que analizan el problema de abajo hacia arriba, es decir, los métodos que componen una solución del problema a partir del análisis del conjunto de restricciones. Se denominan métodos de *descomposición* aquellos que analizan el problema de arriba hacia abajo, es decir, los que analizan las interrelaciones entre las restricciones con el fin de descomponer el problema en subproblemas más simples.

Los métodos constructivos de composición pueden representar las restricciones entre los elementos geométricos de manera implícita o explícita. La representación implícita normalmente se basa en el concepto de conjunto de restricciones, definidos como conjuntos de elementos geométricos cuyas posiciones relativas son conocidas. La aplicación de reglas de reescritura permite fusionar conjuntos de restricciones hasta obtener un solo conjunto que contiene todos los elementos geométricos del problema. La ventaja principal del uso de conjuntos de restricciones es que representan de forma sintética las relaciones entre los elementos geométricos que contienen. En [6, 18, 19, 20], Fudos *et al.* usan un solo tipo de conjuntos de restricciones, denominado *cluster*, y definen una única regla genérica que permite fusionar tres *clusters* cuando éstos comparten un elemento dos a dos. Sunde, [72], y Verroust, [76, 77], usan dos tipos de conjuntos de restricciones: conjuntos de puntos cuyas posiciones relativas son conocidas y conjuntos de segmentos con las direcciones fijadas. Joan-Arinyo y Soto-Riera, [38, 39] añaden un tercer tipo de conjuntos de restricciones: conjuntos formados por un punto y una recta cuya distancia es conocida.

Lee *et al.*, [55], proponen un método constructivo de composición con una representación implícita sobre el grafo de restricciones asociado al problema, véase la Sección 2. A los vértices del grafo se les asigna un estado que puede ser bien definido, semidefinido o indefinido. Aplican reglas de inferencia de información geométrica para modificar el estado de los vértices.

Los métodos constructivos de composición que representan las restricciones de manera explícita normalmente lo hacen mediante predicados en lógica de primer orden. Brüderlin *et al.*, [7, 8, 9, 67, 68] y simplifican estos predicados según los axiomas de la geometría de Hilbert hasta calcular, simbólicamente, las posiciones relativas de los elementos geométricos. Los métodos propuestos por Aldefeld, [1], y Yamaguchi *et al.*, [82], deri-

van información geométrica aplicando propiedades geométricas más elaboradas que los axiomas de Hilbert. Esencialmente producen información sobre el lugar geométrico de un elemento respecto de otros elementos posicionados previamente.

Entre los métodos constructivos de descomposición, Todd, [74], define el concepto de *r-trees* y a partir de él deriva un algoritmo de resolución de restricciones geométricas. Owen, [62], propone un método más general basado en la descomposición recursiva del grafo de restricciones en componentes triconexos. Inspirándose en la descomposición de Owen, Fudos, [18, 20], propone un nuevo método de descomposición.

En el caso de los métodos de Owen [62], de Fudos [18, 20] y de Lee *et al.* [55] se conocen algoritmos eficientes que los implementan con un coste computacional $O(n^3)$, siendo n el número de elementos geométricos del problema.

Los métodos constructivos son incompletos por lo cual resulta interesante conocer cual es su dominio. Verroust, [76, 77], caracteriza parcialmente el dominio de su método. Joan-Arinyo *et al.*, [41, 42], proponen una formalización unificada para el método de composición de Fudos, [19], y los métodos de descomposición de Owen, [62], y de Fudos, [20]. Adicionalmente, Joan-Arinyo *et al.*, en [41, 43] demuestran que el dominio de los tres métodos, aunque desconocido, resulta ser el mismo y se caracteriza por la existencia de una *descomposición en árbol* del grafo de restricciones asociado al problema.

A pesar de que los métodos constructivos son inherentemente bidimensionales, diferentes autores, [7, 32, 76], han intentado aplicar las mismas técnicas al caso tridimensional. Por otro lado, Hoffmann y Joan-Arinyo, [26], proponen una nueva técnica que permite resolver problemas que incluyen restricciones cuyo valor es una variable y ecuaciones que involucran variables externas al problema. La técnica combina un método constructivo y un método ecuacional. En [40], Joan-Arinyo y Soto-Riera extienden y formalizan esta técnica como un sistema de reescritura.

3.4. Análisis de Grados de Libertad

Los métodos de análisis de grados de libertad asocian grados de libertad a los elementos geométricos, grados de libertad que son cancelados por las restricciones. Básicamente, estos métodos analizan el grafo de restricciones geométricas corres-

pondiente al problema. Los vértices y las aristas del grafo se etiquetan con los grados de libertad de los elementos y de las restricciones respectivamente.

Kramer, [48, 49, 50], propone un método de análisis de grados de libertad para la resolución de problemas de cinemática, concretamente para la simulación de mecanismos. En la implementación, Kramer usa técnicas de planificación para obtener una solución simbólica exacta, a la que llama *plan*. El conjunto de reglas que usa en la generación del plan se basa en propiedades geométricas y, por lo tanto, el plan obtenido conserva el sentido geométrico. En cuanto a la corrección, Kramer, [48], propone un programa que demuestra la canonicidad del conjunto de reglas. Si n es el número de elementos geométricos del problema y m es el número de restricciones, el coste del método de Kramer es $O(nm)$. Bhansali *et al.*, [3], proponen la generación automática de fragmentos de plan que es una de las labores más complejas del método de Kramer.

Salomons *et al.*, [64], representan los objetos y las restricciones mediante grafos conceptuales. Combinan razonamiento geométrico y ecuacional en la resolución de restricciones. El método de razonamiento geométrico es similar al de Kramer.

En [33, 34], Hsu presenta un método de resolución con dos fases claramente diferenciadas: resolución simbólica y cálculo. En la primera fase se genera un plan que resuelve el problema y en la segunda, el plan se evalúa. En este método se usa razonamiento geométrico cuando es posible y se aplican métodos numéricos cuando no lo es.

Latham *et al.*, [54], descomponen el grafo de grados de libertad en subgrafos mínimos independientes, que denominan *balanced sets*. El método de Latham permite detectar casos sobrerrestringidos y infrarrestingidos y proponen asignar prioridades a las restricciones para resolver los casos sobrerrestringidos. Ciertas configuraciones de un *balanced set* se corresponden con construcciones geométricas mientras que las otras configuraciones se resuelven a partir del sistema de ecuaciones asociado. Este método admite restricciones cuyo parámetro asociado es una variable. En [54] Latham demuestra que el método es correcto.

Recientemente, Hoffmann *et al.* han desarrollado una técnica basada en flujos para descomponer grafos de restricciones geométricas, [27, 28, 29, 30]. La técnica se basa en determinar en el grafo de restricciones subgrafos *densos minimales*, cada uno de los cuales se corresponde con un subpro-

blema del problema de restricciones que, necesariamente, debe ser resuelto de manera independiente. Por tanto, los grafos densos minimales definen una descomposición del problema dado. El método es general pero, en principio, la descomposición generada normalmente no será interpretable geoméricamente.

3.5. Demostración de Teoremas Geométricos

La resolución de restricciones geométricas puede plantearse como la demostración de un teorema geométrico. Sin embargo, el problema de la demostración automática de teoremas geométricos requiere métodos más generales y, por lo tanto, mucho más sofisticados que los empleados en la resolución de restricciones geométricas.

Wu, [80, 81], aplica el método algebraico de Wu-Ritt de resolución de sistemas de ecuaciones a la demostración de teoremas geométricos. El método de Wu tiene en cuenta las condiciones necesarias para obtener soluciones no degeneradas. Chou, [12], usa el método de Wu para demostrar diversos teoremas geométricos, algunos de los cuales no habían sido demostrados previamente. Otro aspecto relacionado con la demostración automática de teoremas es la obtención de una interpretación geométrica de las demostraciones. Chou *et al.*, [13, 14], trabajan este aspecto de la demostración de teoremas geométricos.

4. SolBCN. Un Solver Constructivo

Para ilustrar los conceptos esbozados en las secciones precedentes, presentamos de manera concisa las características principales del solver SolBCN, [70].

Los problemas que puede tratar el solver SolBCN son configuraciones geométricas de un espacio de dos dimensiones formadas por puntos, segmentos, arcos y círculos. Las restricciones que pueden definirse sobre dichos objetos son, entre otras, distancia entre dos puntos, distancia entre un punto y un segmento, el ángulo comprendido entre dos segmentos así como relaciones de incidencia, perpendicularidad, paralelismo, tangencia y concentricidad.

El solver pertenece a la familia de los solvers va-

riacionales, así pues, las restricciones se procesan sin la necesidad de ordenarlas de forma preestablecida alguna. La técnica de resolución usada pertenece a la familia constructiva de composición con representación implícita. En una primera fase, el solver usa un sistema de reescritura para construir un plan de construcción. Es decir, una secuencia de pasos que definen las operaciones a realizar para determinar las posiciones relativas de los componentes geométricos del problema. En una segunda fase, dados los valores concretos de las dimensiones, el plan de construcción se interpreta como un programa funcional para generar una instancia del objeto geométrico deseado. A continuación se expone como se realiza la representación de los datos así como las reglas disponibles.

4.1. Representación de los datos

Todas las restricciones mencionadas pueden representarse mediante distancias entre dos puntos, distancia entre un punto y una recta, y ángulo entre dos rectas. La notación usada para representar las restricciones se derivada del trabajo de Verroust, [77]. La restricción de distancia entre puntos se representa mediante un conjunto CD, la restricción de distancia punto-segmento se representa mediante un conjunto CH, finalmente la restricción de ángulo entre rectas se representa usando un conjunto CA. Estos tres tipos de conjuntos se definen como sigue.

Un conjunto CD es un conjunto de puntos cuyas posiciones relativas son conocidas. Con cada conjunto CD se asocia un sistema de coordenadas y todos los puntos del conjunto se posicionan con respecto a dicho sistema. Cuando un CD contiene solamente dos puntos le llamamos conjunto CD *elemental*. Es interesante observar que un problema de restricciones geométricas está resuelto cuando todos los puntos del problema pertenecen a un mismo conjunto CD.

Un conjunto CH contiene un punto y un segmento relacionados mediante una restricción de distancia entre punto y recta.

Un conjunto CA contiene un par de segmentos orientados que se hallan mutuamente relacionados mediante una restricción de ángulo entre rectas.

En lo que sigue, nos referiremos a los conjuntos CD, CH y CA genéricamente como *conjuntos de restricciones*.

4.2. Reglas

De acuerdo con su funcionalidad, las reglas se clasifican en tres tipos: reglas de creación, de fusión y de construcción. A continuación detallamos las características más sobresalientes de cada tipo de reglas.

4.2.1. Reglas de creación

Las reglas de creación son aquellas que permiten crear conjuntos CD elementales, conjuntos CA y conjuntos CH a partir de la interpretación del problema geométrico definido mediante restricciones dado por el usuario. El signo de las distancias y los ángulos se basan en las posiciones relativas entre los elementos geométricos dadas en la definición del problema. Cuando se incluye una restricción de distancia entre dos puntos, se crea un conjunto CD en el que los puntos están siempre situados respecto al sistema local de coordenadas en las posiciones $(0, 0)$ y $(d, 0)$. La Figura 6 ilustra la descripción de la regla.

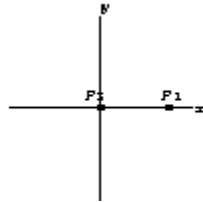


Figura 6. Conjunto CD elemental.

Cuando el usuario incluye en el problema una restricción de ángulo entre dos segmentos, se crea un conjunto CA de manera que uno de los segmentos define el eje positivo de abscisas y el otro segmento se sitúa con un ángulo relativo igual al dado. La Figura 7 ilustra la descripción de la regla.

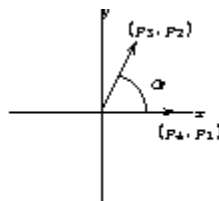


Figura 7. Creación de un conjunto CA.

Cuando se incluyen un punto, un segmento y una

restricción de distancia entre ambos, se crea un conjunto CH que contiene la recta definida por los extremos del segmento y el punto dado situado a una distancia perpendicular igual a la dada respecto de la recta. La Figura 8 ilustra la descripción de la regla.

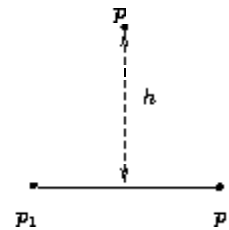


Figura 8. Creación de un conjunto CH.

4.2.2. Reglas de fusión

Solamente existe una regla de este tipo. Dicha regla permite calcular la clausura transitiva del conjunto de restricciones de ángulos. Cuando un mismo segmento pertenece a dos conjuntos CA distintos, por ejemplo ca_1 y ca_2 , la regla crea un nuevo conjunto CA, llámese ca_3 , que restringe mediante un ángulo los segmentos $s_1 \in ca_1$ y $s_2 \in ca_2$, siendo s_1 y s_2 los segmentos distintos del que comparten los conjuntos ca_1 y ca_2 .

4.2.3. Reglas de construcción

Las reglas de construcción fusionan conjuntos de restricciones CD, CA y CH para obtener conjuntos CD que incluyen todos los puntos pertenecientes a los conjuntos fusionados. La fusión se realiza a través de construcciones basadas en la construcción de triángulos y algunos cuadriláteros. En Joan-Arinyo *et. al.* [37] se proporciona una descripción completa de dichas reglas.

4.3. Implementación

La Figura 9 muestra la arquitectura del solver SolBCN, [42]. El solver consta de tres componentes: el analizador, el selector y el constructor. El analizador determina simbólicamente si el problema de restricciones es o no es resoluble por el método. Caso de ser resoluble, lo resuelve y genera el plan de construcción. El selector es el componente que permite seleccionar una instancia de

solución concreta. Actualmente se han desarrollado diversos selectores basados en técnicas diferentes. Véanse Luzón [59] y Joan-Arinyo *et al.*, [36]. Finalmente el constructor es el componente cuya misión es construir de manera efectiva la instancia solución. El constructor aplica de manera efectiva la secuencia constructiva a los datos producidos por el selector y los valores concretos asignados a los parámetros de las restricciones.

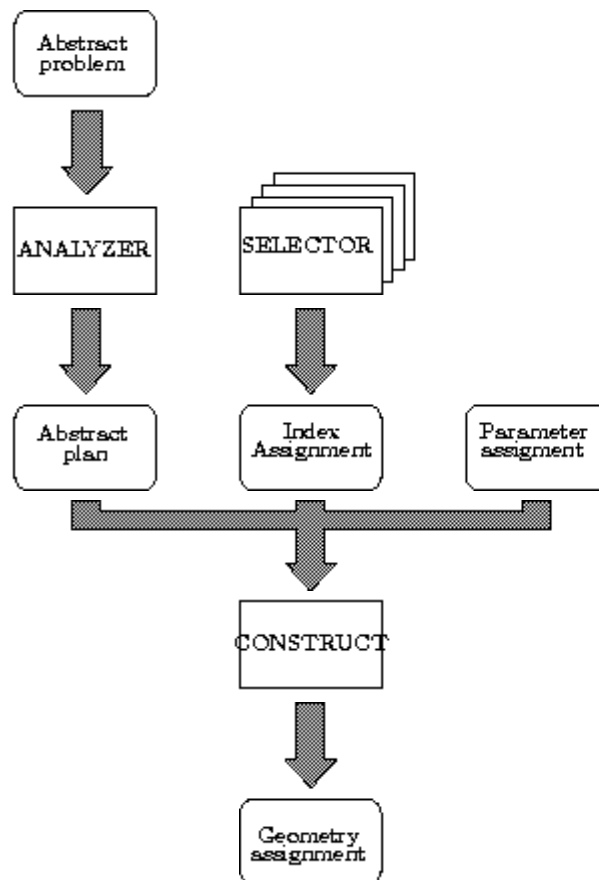


Figura 9. Arquitectura del solver SolBCN.

Diversas razones avalan el uso de esta arquitectura. En primer lugar, los cálculos en cada componente del solver tiene una naturaleza muy distinta. Así, por ejemplo, el analizador genera el plan de construcción aplicando cálculo simbólico mientras que el constructor realiza eminentemente cálculo numérico. En segundo lugar, la decisión sobre la resolubilidad del problema se realiza durante la fase de análisis y no depende de los cálculos geométricos ni de los valores concretos de los parámetros. En tercer lugar, para obtener diferentes instancias solución por variación de los valores concretos asignados a los parámetros

de las restricciones, sólo es necesario aplicar la fase de construcción. Con ello se evita aplicar de manera innecesaria la fase de análisis, que es la de mayor coste computacional. Finalmente, las incoherencias numéricas que puedan aparecer durante la fase de construcción no afectan al análisis del problema.

El analizador se ha implementado como un sistema experto escrito en Prolog. Se ha seleccionado dicho lenguaje tanto por su capacidad para expresar cálculos simbólicos como por la facilidad con la que pueden desarrollarse diferentes prototipos experimentales. Por otro lado, el constructor es esencialmente una máquina virtual capaz de ejecutar una secuencia constructiva generada por el analizador y producir una instancia solución.

Agradecimientos

Los trabajos presentados aquí han sido financiados en parte por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y en parte con fondos FEDER, bajo el proyecto TIC2001-2099-C03-01.

Referencias

- [1] B. Aldefeld. Variation of geometric based on a geometric-reasoning method. *Computer-Aided Design*, 20(3):117-126, April 1988.
- [2] Eugene L. Allgower and Kurt Georg. Continuation and path following. *Acta Numerica*, 7:1-64, 1993.
- [3] S. Bhansali, G.A. Kramer, and T.J. Hoar. A principled approach towards symbolic geometric constraint satisfaction. *Journal of Artificial Intelligence Research*, (4):419-443, 1996.
- [4] A. Borning, R. Anderson, and B. Freeman-Benson. Indigo: A local propagation algorithm for inequality constraints. In *UIST'96*, pages 129-136, Seattle, Washington, USA, November 6-8 1996. ACM.
- [5] A.H. Borning. The programming language aspects of ThingLab, a constrained oriented simulation laboratory. *ACM Trans. on Prog. Lang. and Systems*, 3(4):353-387, October 1981.
- [6] W. Bouma, I. Fudos, C. Hoffmann, J. Cai, and R. Paige. Geometric constraint solver.

- Computer Aided Design*, 27(6):487–501, June 1995.
- [7] B.D. Brüderlin. *Rule-Based Geometric Modelling*. PhD thesis, Institut für Informatik der ETH Zürich, 1988.
- [8] B.D. Brüderlin. Symbolic computer geometry for computer aided geometric design. In *Advances in Design and Manufacturing Systems*, Tempe, AZ, Jan. 8-12 1990. Proceedings NSF Conference.
- [9] B.D. Brüderlin. Using geometric rewrite rules for solving geometric problems symbolically. In *Theoretical Computer Science 116*, pages 291–303. Elsevier Science Publishers B.V., 1993.
- [10] S.A. Buchanan and A. de Penington. Constraint definition system: a computer-algebra based approach to solving geometric-constraint problems. *Computer-Aided Design*, 25(12):741–750, December 1993.
- [11] B. Buchberger. *Multidimensional Systems Theory*, chapter Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory, pages 184–232. D. Reidel Publishing Theory, 1985.
- [12] S.-C. Chou. An introduction to Wu’s method for mechanical theorem proving in geometry. *Journal of Automated Reasoning*, 4:237–267, 1988.
- [13] S.-C. Chou, X.-S. Gao, and J.-Z. Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants: Multiple and shortest proof generation. *Journal of Automated Reasoning*, 7:325–347, 1996.
- [14] S.-C. Chou, X.-S. Gao, and J.-Z. Zhang. Automated generation of readable proofs with geometric invariants: Theorem proving with full angles. *Journal of Automated Reasoning*, 7:349–370, 1996.
- [15] H.M. Cundy and A.P. Rollet. *Mathematical Models*. Oxford University Press, 1961. Second edition.
- [16] C. Durand. *Symbolic and Numerical Techniques for Constraint Solving*. PhD thesis, Computer Science, Purdue University, December 1998.
- [17] B. Freeman-Benson, J. Maloney, and A. Borning. An incremental constraint solver. *Communications of the ACM*, 33(1):54–63, 1990.
- [18] I. Fudos. *Constraint Solving for Computer Aided Design*. PhD thesis, Purdue University, Department of Computer Sciences, 1995.
- [19] I. Fudos and C.M. Hoffmann. Correctness proof of a geometric constraint solver. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 6(4):405–420, 1996.
- [20] I. Fudos and C.M. Hoffmann. A graph-constructive approach to solving systems of geometric constraints. *ACM Transactions on Graphics*, 16(2):179–216, April 1997.
- [21] J. Graver, B. Servatius, and H. Servatius. *Combinatorial Rigidity*. American Mathematical Society, 1993.
- [22] Y. Hel-Or, A. Rapoport, and M. Werman. Relaxed parametric design with probabilistic constraints. In J. Rossignac, J. Turner, and G. Allen, editors, *Second Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 261–270, Montreal, Canada, May 19–21 1993. ACM Press.
- [23] L. Henneberg. *Die Graphische Statik der Starren Systeme*. Leipzig, 1911.
- [24] A. Heydon and G. Nelson. The Juno-2 constraint-based drawing editor. Research Report 131a, Digital Systems Research Center, December 1994.
- [25] R.C. Hillyard and I.C. Braid. Characterizing non-ideal shapes in terms of dimensions and tolerances. In *ACM Computer Graphics*, pages 234–238, 1978.
- [26] C.M. Hoffmann and R. Joan-Arinyo. Symbolic constraints in constructive geometric constraint solving. *Journal of Symbolic Computation*, 23:287–300, 1997.
- [27] C.M. Hoffmann, A. Lomonosov, and M. Sitharam. Finding solvable subsets of constraint graphs. In *Principles and Practice of Constraint Programming*, pages 463–477, Schloss Hagenberg, Austria, October 29 - November 1 1977.
- [28] C.M. Hoffmann, A. Lomonosov, and M. Sitharam. Geometric constraint decomposition. In B. Brüderlin and D. Roller, editors, *Geometric Constraint Solving and Applications*, pages 171–195. Springer, Berlin, 1998.

- [29] C.M. Hoffmann, A. Lomonosov, and M. Sitharam. Decomposition Plans for Geometric Constraint Problems, Part II: New Algorithms. *Journal of Symbolic Computation*, 31:409–427, 2001.
- [30] C.M. Hoffmann, A. Lomonosov, and M. Sitharam. Decomposition Plans for Geometric Constraint Systems, Part I: Performance Measurements for CAD. *Journal of Symbolic Computation*, 31:367–408, 2001.
- [31] C.M. Hoffmann and P.J. Vermeer. Geometric constraint solving in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 . In D.-Z. Du and F. Hwang, editors, *Computing in Euclidean Geometry*, pages 266–298. World Scientific Publishing, 1995.
- [32] C.M. Hoffmann and P.J. Vermeer. A spatial constraint problem. In J.P. Merlet and B. Ravani, editors, *Computational Kinematics '95*, pages 83–92. Kluwer Academic Publ., 1995.
- [33] C.-Y. Hsu. *Graph-Based Approach for Solving Geometric Constraint Problems*. PhD thesis, Department of Computer Science, The University of Utah, June 1996.
- [34] C.-Y. Hsu and B.D. Brüderlin. A hybrid constraint solver using exact and iterative geometric constructions. In D. Roller and P. Brunet, editors, *CAD Systems Development: Tools and Methods*, pages 265–279, Berlin, 1997. Springer-Verlag.
- [35] C. Jermann. *Résolution de contraintes géométriques par rigidification récursive et propagation d'intervalles*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2002. Written in French.
- [36] R. Joan-Arinyo, M.V. Luzón, and A. Soto. Genetic algorithms for root multiselection in constructive geometric constraint solving. *Computer & Graphics*, 27(1):51–60, 2003.
- [37] R. Joan-Arinyo and A. Soto. A set of rules for a constructive geometric constraint solver. Technical Report LSI-95-19-R, Department LSI, Universitat Politècnica de Catalunya, 1995.
- [38] R. Joan-Arinyo and A. Soto. A correct rule-based geometric constraint solver. *Computer & Graphics*, 21(5):599–609, 1997.
- [39] R. Joan-Arinyo and A. Soto. A ruler-and-compass geometric constraint solver. In M. J. Pratt, R.D. Sriram, and M.J. Wozny, editors, *Product Modeling for Computer Integrated Design and Manufacture*, pages 384–393. Chapman and Hall, London, 1997.
- [40] R. Joan-Arinyo and A. Soto-Riera. Combining constructive and equational geometric constraint solving techniques. *ACM Transactions on Graphics*, 18(1):35–55, January 1999.
- [41] R. Joan-Arinyo, A. Soto-Riera, S. Vila-Marta, and J. Vilaplana. On the domain of constructive geometric constraint solving techniques. In R. Duricovic and S. Czaner, editors, *Spring Conference on Computer Graphics*, pages 49–54, Budmerice, Slovakia, April 25-28 2001. IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA.
- [42] R. Joan-Arinyo, A. Soto-Riera, S. Vila-Marta, and J. Vilaplana. Declarative characterization of a general architecture for constructive geometric constraint solvers. In D. Plemenos, editor, *The Fifth International Conference on Computer Graphics and Artificial Intelligence*, pages 63–76, Limoges, France, 14-15 May 2002. Université de Limoges.
- [43] R. Joan-Arinyo, A. Soto-Riera, S. Vila-Marta, and J. Vilaplana. Revisiting decomposition analysis of geometric constraint graphs. In K. Lee and N. Patrikalakis, editors, *Seventh Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 105–115, Saarbrücken, Germany, June 19-21 2002. ACM Press.
- [44] L. W. Johnson and R. D. Riess. *Numerical analysis*. Addison-Wesley, 1982. Second edition.
- [45] N. Kin, Y. Takai, and T.L. Kunii. A connectionist approach to geometrical constraint-solving. In B. Falcidieno and T. Kunii, editors, *Modeling in Computer Graphics*. Springer Verlag, 1993.
- [46] K. Kondo. PIGMOD : Parametric and interactive geometric modeller for mechanical design. *Computer Aided Design*, 22(10):633–644, December 1990.
- [47] K. Kondo. Algebraic method for manipulation of dimensional relationships in geometric models. *Computer Aided Design*, 24(3):141–147, March 1992.

- [48] G. Kramer. *Solving Geometric Constraints Systems*. MIT Press, 1992.
- [49] G.A. Kramer. Using degrees of freedom analysis to solve geometric constraint systems. In J. Rossignac and J. Turner, editors, *Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications*, pages 371–378, Austin, TX, June 5-7 1991. ACM Press.
- [50] G.A. Kramer. A geometric constraint engine. *Artificial Intelligence*, 58(1-3):327–360, 1992.
- [51] G. Kwaiter, V. Gaidrat, and R. Caubet. Interactive constraint system for solid modeling objects. In C. Hoffmann and W. Bronsvort, editors, *Fourth Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 265–270. ACM SIGGRAPH, May 1997.
- [52] G. Laman. On graphs and rigidity of plane skeletal structures. *Journal of Engineering Mathematics*, 4(4):331–340, October 1970.
- [53] H. Lamure and D. Michelucci. Solving geometric constraints by homotopy. In C. Hoffmann and J. Rossignac, editors, *Third Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 263–269, Salt Lake City, Utah USA, May 17-19 1995. ACM Press.
- [54] R.S. Latham and A.E. Middleditch. Connectivity analysis: a tool for processing geometric constraints. *Computer Aided Design*, 28(11):917–928, November 1996.
- [55] J.Y. Lee and K. Kim. Geometric reasoning for knowledge-based parametric design using graph representations. *Computer-Aided Design*, 28(10):831–841, 1996.
- [56] W. Leler. *Constraint Programming Languages: Their Specification and Generation*. Addison Wesley, 1988.
- [57] R. Light and D. Gossard. Modification of geometric models through variational geometry. *Computer Aided Design*, 14:209–214, July 1982.
- [58] V.C. Lin, D.C. Gossard, and R.A. Light. Variational geometry in computer-aided design. *ACM Computer Graphics*, 15(3):171–177, August 1981.
- [59] M.V. Luzón. *Resolución de Restricciones Geométricas. Selección de la Solución Deseada*. PhD thesis, Dept. Informática, Universidad de Vigo, December 2001. (Written in Spanish).
- [60] K. Murota. *Systems Analysis by Graphs and Matroids*. Algorithms and Combinatorics 3. Springer-Verlag, 1987.
- [61] G. Nelson. Juno, a constraint-based graphics system. *SIGGRAPH*, pages 235–243, San Francisco, July 22–26 1985.
- [62] J.C. Owen. Algebraic solution for geometry from dimensional constraints. In R. Rossignac and J. Turner, editors, *Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications*, pages 397–407, Austin, TX, June 5-7 1991. ACM Press.
- [63] J.C. Owen. Constraints on simple geometry in two and three dimensions. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 6(4):421–434, 1996.
- [64] O.W. Salomons, F. van Slooten, F.J.A.M van Houten, and H.J.J. Kals. Conceptual graphs in constraint based re-design. In C. Hoffmann and J. Rossignac, editors, *Third Symposium on Solid Modeling and Applications*, pages 55–64, Salt Lake City, Utah USA, May 17-19 1995. ACM Press.
- [65] M. Sannella. The SkyBlue constraint solver. Technical Report 92-07-02, University of Washington, Dep of Computer Science and Engineering, 1993.
- [66] D. Serrano. Automatic dimensioning in design for manufacturing. In J. Rossignac and J. Turner, editors, *Symposium on Solid Modeling Foundations and CAD/CAM Applications*, pages 379–386, Austin, TX, June 5-7 1991. ACM Press.
- [67] W. Sohrt. Interaction with constraints in three-dimensional modeling. Master's thesis, Dept of Computer Science, The University of Utah, March 1991.
- [68] W. Sohrt and B.D. Brüderlin. Interaction with constraints in 3D modeling. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 1(4):405–425, 1991.
- [69] L. Solano and P. Brunet. Constructive constraint-based model for parametric CAD systems. *Computer Aided Design*, 26(8):614–621, August 1994.

- [70] A. Soto. *Satisfacció de restriccions geomètriques en 2D*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Dept. Llenguatges i Sistemes Informàtics, 1998. (Written in Catalan).
- [71] N. Sridhar, R. Agrawal, and G.L. Kinzel. Algorithms for the structural diagnosis and decomposition of sparse, underconstrained design systems. *Computer-Aided Design*, 28(4):237–249, 1996.
- [72] G. Sunde. A CAD system with declarative specification of shape. *Eurographics Workshop on Intelligent CAD Systems*, pages 90–105, April 1987.
- [73] I. Sutherland. Sketchpad, a man-machine graphical communication system. In *Proc. of the Spring Joint Comp. Conference*, pages 329–345. IFIPS, 1963.
- [74] P. Todd. A k-tree generalization that characterizes consistency of dimensioned engineering drawings. *SIAM J. Disc. Math.*, 2(2):255–261, 1989.
- [75] R.C. Veltkamp and F. Arbab. Geometric constraint propagation with quantum labels. In B. Falcidieno, I. Herman, and C. Pienovi, editors, *Eurographics Workshop on Computer Graphics and Mathematics*, pages 211–228. Springer, 1992.
- [76] A. Verroust. *Etude de Problèmes Liés à la Définition, la Visualisation et l'Animation d'Objects Complexes en Informatique Graphique*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, 1990. (Written in French).
- [77] A. Verroust, F. Schonek, and D. Roller. Rule-oriented method for parameterized computer-aided design. *Computer Aided Design*, 24(10):531–540, October 1992.
- [78] W. Whiteley. Applications of the geometry of rigid structures. In Henry Crapo, editor, *Computer Aided Geometric Reasoning*, pages 219–254. INRIA, 1987.
- [79] W. Whiteley. Rigidity and scene analysis. In J.E. Goodman and J. O'Rourke, editors, *Handbook for discrete and computational geometry*, pages 893–916. CRC Press LLC, 1998.
- [80] Wen-Tsün Wu. Basic principles of mechanical theorem proving in geometries. *J. of Systems Sciences and Mathematical Sciences*, 4:207–235, 1986.
- [81] Wen-Tsün Wu. Mechanical theorem proving in geometries. In B. Buchberger and G. E. Collins, editors, *Texts and monographs in symbolic computations*. Springer-Verlag, 1994.
- [82] Y. Yamaguchi and F. Kimura. A constraint modeling system for variational geometry. In J.U. Turner M.J. Wozny and K. Preiss, editors, *Geometric Modeling for Product Engineering*, pages 221–233. Elsevier North Holland, 1990.