Some reflections on the semantic of a fuzzy constraint

Paulo Félix, Senén Barro y Abraham Otero

Dept. Electrónica y Computación
Universidad de Santiago de Compostela
15782, Santiago de Compostela

e-mail: {paulo,senen,abraham}@dec.usc.es

Since its initial definition in [25], Constraint Satisfaction Problem (CSP) formalism has proved to be highly versatile for modelling problems for which there is a non-analytic description. There is an ever increasing number of applications in which this description is not effected in precise terms, and for which the fuzzy set theory supplies an acceptable solution. In this work we review a number of proposals that, using fuzzy sets, model the constraints that bound the solution space of a problem, with special emphasis being placed on the possible meaning of a fuzzy constraint.

Inteligencia Artificial, Revista Iberoamericana de Inteligencia Artificial. No.20 (2003)
ISSN: 1137-3601. *(http://www.aepia.org/revista) pp 83-94.*

Algunas reflexiones sobre la semántica de una restricción borrosa

Paulo Félix, Senén Barro y Abraham Otero

Dept. Electrónica y Computación
Universidad de Santiago de Compostela
15782, Santiago de Compostela
{paulo,senen,abraham}@dec.usc.es

Resumen

El formalismo de los Problemas de Satisfacción de Restricciones (CSP en su común denominación en inglés) ha venido demostrando desde su primera definición en [25] una gran versatilidad para modelar aquellos problemas de los que se dispone de una descripción no analítica. Cada vez son más las aplicaciones en las que esta descripción no se realiza en términos precisos, y para las que la teoría de conjuntos borrosos proporciona una solución aceptable. En este trabajo realizamos una revisión de distintas propuestas que modelan mediante conjuntos borrosos las restricciones que acotan el espacio de soluciones de un problema, haciendo énfasis en los posibles significados de una restricción borrosa.

Palabras clave: CSP, Conjuntos Borrosos, Preferencia, Incertidumbre, Similitud.

1. Introducción

Preferencia, similitud, vaguedad, incertidumbre, imprecisión o posibilidad son algunos de los términos que caracterizan el conocer y razonar humanos, y que resultan determinantes en aquellas situaciones en las que la información disponible es incompleta. La progresiva automatización de tareas que incorporan información procedente de la descripción realizada por un ser humano, habitualmente mediante el lenguaje, nos demandan modelar algunas de las características arriba indicadas.

Tomamos como punto de partida el formalismo CSP como soporte de la representación y procesamiento de la información que describe un problema, en una forma declarativa que permite expresar el conjunto de restricciones que debe satisfacer cualquiera de sus posibles soluciones. El formalismo CSP se ha mostrado adecuado para modelar numerosas tareas cognitivas pertenecientes al ámbito de la visión, la comprensión del lenguaje natural, el razonamiento temporal y espacial, la supervisión de pacientes, etcétera [7]. En cambio, las restricciones de un CSP se definen de una forma nítida que no parece ajustarse a la naturaleza de la información a representar en una gran parte de los problemas mencionados (pensemos en la información temporal que contiene el relato de un paciente, y su intrínseco carácter vago e impreciso). Por otra parte, una representación nítida de la información supone algunos inconvenientes: por una parte, en problemas sobrespecificados en los que las restricciones impiden la existencia de una solución; por otra, en problemas subespecificados en los que aparecen excesivas soluciones posibles. Una representación mediante conjuntos borrosos de las restricciones de un CSP hace de la satisfacción una cuestión de grado, permitiendo relajar aquellas restricciones que impiden la obtención de una solución, o imponer algún tipo de orden entre aquellas soluciones posibles.

Podemos decir ahora que el objeto de nuestro estudio serán los problemas de satisfacción de restricciones borrosas (FCSP), término acuñado en una definición general realizada en [10], a pesar de que con anterioridad o al mismo tiempo ya se proponían algunos modelos CSP en los que se utilizaba una representación borrosa de las restricciones [1, 28, 30]. La adopción de una representación borrosa de la información permite una adaptación sencilla de aquellos algoritmos de procesamiento de CSP, y se enmarca en un esquema más general de representación de restricciones flexibles basada en una estructura en semianillo [3]. En particular, nos interesa estudiar aquí no tanto el procesamiento de FCSP, como la forma en que las restricciones borrosas nos permiten modelar nociones como las mencionadas al comienzo de esta introducción, es decir, nos interesa estudiar las posibilidades semánticas de las restricciones borrosas, y que en buena medida condicionan el uso de FCSP en la resolución de problemas. Apoyaremos esta explicación con algunas propuestas encontradas en la bibliografía y que muestran distintas aplicaciones de los FCSP.

2. Restricción borrosa

La noción de posibilidad aparece como punto de partida en la formalización de FCSP. Zadeh define el concepto de distribución de posibilidad como una restricción borrosa que restringe de un modo flexible los valores que pueden ser asignados a una variable [35]. Además, destaca la naturaleza posibilista de buena parte de las imprecisiones presentes en el lenguaje natural. Así, dada una variable x que toma valores en el universo de discurso $\mathcal{U}$, el predicado *"x toma un valor pequeño"* induce una restricción borrosa $R(x) = F$, donde F es un subconjunto borroso de $\mathcal{U}$ caracterizado por una función de pertenencia $\mu_{F=pequeño}$ que toma valores en el intervalo $[0,1]$, y que representa el significado de un valor pequeño en dicha variable. La teoría de la posibilidad nos dice que si la única información disponible es que el valor de x es pequeño, y su valor preciso es desconocido, entonces $\mu_{F=pequeño}(u)$ se puede utilizar como una medida de la posibilidad π_x de que el valor de x sea u, lo que se representa por $\pi_x(u) = \mu_{F=pequeño}(u)$ [9]. El uso de funciones de pertenencia en la representación de distribuciones de posibilidad viene condicionado por el carácter disjunto de esta representación, y así, los valores que pertenecen al soporte del subconjunto borroso F, definido como $\{u \in \mathcal{U},\ \mu_F(u) > 0\}$ son candidatos mutuamente excluyentes al valor de x, lo que contrasta con el carácter usual de reunión de la noción de conjunto.

3. FCSP

Zadeh generaliza la idea de restricción borrosa R sobre un conjunto de variables $\{X_1, ..., X_n\}$ [34], y la describe mediante una relación borrosa, esto es, un subconjunto borroso del producto cartesiano de los dominios en los que toman valores dichas variables $\mathcal{U}_1 \times ... \times \mathcal{U}_n$. R viene dada por una función de pertenencia μ_R, que asocia a cada vector $u = (u_1, ..., u_n) \in \mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \times ... \times \mathcal{U}_n$ un grado de pertenencia que indica el grado con que u satisface la restricción R. Las restricciones precisas son así casos particulares de las restricciones flexibles, mostrando un grado de satisfacción 0 o 1.

Además, Zadeh generaliza las operaciones típicas sobre relaciones precisas a las relaciones borrosas, y así tenemos que una relación R' está *incluida* en R, $R' \subseteq R$, si y sólo si:

$$\forall u \in \mathcal{U},\ \mu_{R'}(u) \leq \mu_R(u)$$

La operación de inclusión nos permite hablar de restricciones más o menos restrictivas que otras. La *proyección* de una relación borrosa R en $\mathcal{U}_{i_1} \times ... \times \mathcal{U}_{i_k}$ es una nueva relación borrosa $R' = Proy(R)$ en $\mathcal{U}_{i_1} \times ... \times \mathcal{U}_{i_k}$ tal que:

$$\mu_{Proy(R)}(u_{i_1}, ..., u_{i_k}) = \sup_{u, X_{i_1}=u_{i_1}, ..., X_{i_k}=u_{i_k}} \mu_R(u)$$

La *extensión cilíndrica* de una relación borrosa R definida en $\mathcal{U}_{i_1} \times ... \times \mathcal{U}_{i_k}$ al dominio $\mathcal{U}_{j_1} \times ... \times \mathcal{U}_{j_l}$, tal que $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \{j_1, ..., j_l\}$ es una relación borrosa $R' = ExtC(R)$ en $\mathcal{U}_{j_1} \times ... \times \mathcal{U}_{j_l}$ tal que:

$$\mu_{ExtC(R)}(u_{j_1}, ..., u_{j_l}) = \mu_R(u_{i_1}, ..., u_{i_k})$$

La combinación de información expresada en forma de relaciones borrosas R_i en $\mathcal{U}_{i_1} \times ... \times \mathcal{U}_{i_k}$ y R_j en $\mathcal{U}_{j_1} \times ... \times \mathcal{U}_{j_l}$ es una nueva relación $R' = R_i \wedge R_j$, generalización de la intersección de conjuntos, en $\mathcal{U}_{h_1} \times ... \times \mathcal{U}_{h_m}$, siendo $\{h_1, ..., h_m\} = \{i_1, ..., i_k\} \cup \{j_1, ..., j_l\}$, y tal que:

$$\mu_{R_i \wedge R_j}(u_{h_1}, ..., u_{h_m}) = \\ = min\{\mu_{R_i}(u_{i_1}, ..., u_{i_k}), \mu_{R_j}(u_{j_1}, ..., u_{j_l})\}$$

Podemos definir un FCSP $\mathcal{N} = \{\mathcal{X}, \mathcal{R}\}$ como un conjunto finito de variables $\mathcal{X} = \{X_1, ..., X_n\}$ tomando valores en los dominios $\mathcal{U}_1, ..., \mathcal{U}_n$, y un conjunto finito de restricciones borrosas $\mathcal{R} = \{R_1, ..., R_p\}$ entre ellas.

Se dice que una asignación $u = \{u_1, ..., u_n\}$ es una *σ-solución* de $\mathcal{N}$ ($\sigma \in (0, 1]$) si satisface la combinación de todas las restricciones con grado σ:

$$\mu_{S(\mathcal{N})}(u) = \min_{i \in \{1,...,p\}} \{\mu_{R_i}(u_{i_1}, ..., u_{i_k})\} = \sigma$$

siendo $\{u_{i_1}, ..., u_{i_k}\} \subseteq u$. $\mu_{S(\mathcal{N})}$ representa el conjunto borroso de soluciones de $\mathcal{N}$. Decimos que $\mathcal{N}$ es *σ-consistente* si el grado de satisfacción de la mejor solución es al menos σ: $sup_u \mu_{S(\mathcal{N})}(u) \geq \sigma$. Con $\sigma = 1$ recuperamos la definición de consistencia de los CSP.

3.1. Procesamiento de FCSP

Uno de los problemas básicos de los CSP en general, y de los FCSP en particular es la obtención de soluciones. Un CSP es equivalente a una relación n-aria entre las variables del problema. La principal dificultad para obtener las soluciones es que dicha relación n-aria no se conoce de forma explícita, y por tanto ha de ser inferida a partir de la agregación de información de carácter local. Tradicionalmente se ha venido realizando una representación de los CSP basada en grafos, lo que ha permitido aplicar un buen número de técnicas computacionales que provienen de la teoría de grafos, así como sacar provecho de las propiedades topológicas que caracterizan la estructura de relaciones que define el CSP [32].

Las técnicas de procesamiento de CSP se dividen en dos categorías [7]: aquellas basadas en procedimientos de búsqueda y aquellas basadas en procedimientos de inferencia; aunque un buen número de técnicas integran ambas perspectivas. No nos detendremos más aquí, puesto que nos interesa analizar en qué medida el procesamiento de FCSP se distingue del correspondiente a un CSP clásico. En este sentido, destacamos el papel de la agregación en el cálculo de soluciones de los FCSP. La teoría de la utilidad [26] reconoce dos aproximaciones diferentes: el *utilitarismo*, que maximiza la suma de las utilidades individuales, y el *igualitarismo*, que maximiza la utilidad individual. La agregación que hemos propuesto en nuestra definición de solución se denomina agregación *maximin*, se corresponde con la aproximación igualitaria, y debe a las propiedades asociativa y de idempotencia del mínimo su capacidad para permitir una generalización sencilla de los algoritmos de procesamiento de los CSP, en particular los basados en los procedimientos de inferencia (algoritmos de propagación de restricciones) [12]. En su contra, el principal defecto de la agregación maximin es su pobre capacidad para discriminar el conjunto de soluciones: no es capaz de distinguir entre dos soluciones completamente distintas excepto en la satisfacción de la restricción peor satisfecha. Así, dado un FCSP de tres restricciones, la agregación maximin no distingue entre los vectores de satisfacción (0.1,0.9,1) y (0.2,0.1,0.1). Por otro lado, tenemos las agregaciones de carácter aditivo, que se corresponden con el punto de vista utilitarista, y que proponen una compensación entre aquellas restricciones peor satisfechas y las mejor satisfechas. Esta aproximación permite obtener soluciones válidas aún no satisfaciendo alguna de las restricciones de la red, lo que puede ser útil en aquellas aplicaciones que buscan maximizar el número de restricciones satisfechas [20]. En su contra, el principal defecto de este tipo de agregaciones es que distorsionan los resultados en aquellos problemas en los que la información es redundante, como es el caso de los CSP una vez que se llevan a cabo procedimientos de propagación de restricciones. En aquellos FCSP en los que no se da esta redundancia no parece haber problema en la aplicación de este tipo de agregaciones, e incluso considerar un mayor grado de flexibilidad en la agregación permitiendo introducir una cuantificación lingüística sobre la proporción de restricciones satisfechas (*"encontrar una solución que satisfaga la mayor parte de las restricciones del problema"*) [33].

4. La preferencia en FCSP

Una de las utilidades más evidentes para la aplicación del formalismo FCSP aparece en problemas de decisión, en donde se ha de realizar una elección de los valores de ciertas variables de decisión sometidas a un conjunto de restricciones (flexibles) que ordenan las posibles asignaciones en virtud de ciertos criterios de preferencia. Esto es muy común en problemas de planificación, en los que se debe proporcionar la ordenación de un conjunto de tareas. Podríamos definir brevemente un problema sencillo de secuenciación de tareas [11] como un conjunto $\mathcal{T}$ de tareas a desarrollar mediante un conjunto de recursos. Cada tarea τ requiere la ordenación de un conjunto $\mathcal{O}_\tau$ de operaciones O_i, operaciones que una vez empezadas no pueden ser interrumpidas, cada una de las cuales tiene una duración t_i y que siguen un programa que impone un conjunto de restricciones de precedencia entre ellas. Así la precedencia de O_i respecto a O_k impone la restricción de que $c_i + t_i \leq c_k$ siendo c_i y c_k los instantes de comienzo de las operaciones O_i y O_k, respectivamente. Cada operación es ejecutada por un determinado recurso, y cada recurso no puede ejecutar más de una operación simultáneamente: así una restricción añadida es que dos operaciones que requieren el mismo recurso no pueden solaparse en su ejecución, esto es, $c_i + t_i \leq c_k$ o $c_k + t_k \leq c_i$. Hasta aquí las restricciones precisas. Además, cada una de las tareas está sujeta a restricciones sobre su ocurrencia temporal, que nos indican que la tarea τ debe estar necesariamente terminada en una fecha de entrega e_τ^{sup}, y sería preferible que lo estuviera antes de e_τ^{inf}. Del mismo modo, se puede indicar una fecha de inicio i_τ^{inf} antes de la cual no es posible comenzar la tarea, pero sería deseable que comenzara después de i_τ^{sup}. En la figura 1 podemos encontrar una representación de la ventana temporal en la que la tarea τ debe tener lugar, y que viene definida por el intervalo borroso $[I_\tau, E_\tau]$ (figura 1).

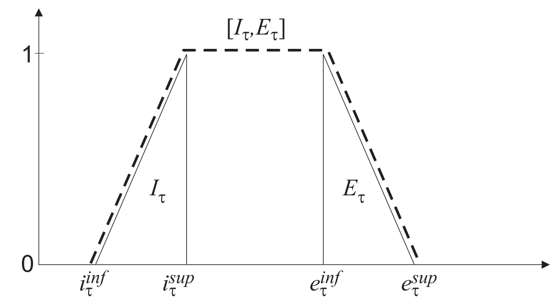

Fig. 1. Ventana temporal de la tarea τ [11].

Esta ventana temporal impone las siguientes restricciones sobre las fechas c_τ y f_τ de comienzo y fin de la tarea τ:

$$\Pi(c_\tau \geq i_\tau) = \sup_{u \leq c_\tau} \mu_{I_\tau}(u) = \mu_{[I_\tau, +\infty)}(c_\tau)$$
$$\Pi(f_\tau \leq e_\tau) = \sup_{u \geq f_\tau} \mu_{E_\tau}(u) = \mu_{(-\infty, E_\tau]}(f_\tau)$$

Veamos el significado de estas expresiones en una de ellas. $\Pi(f_\tau \leq e_\tau)$ indica la posibilidad de que exista un valor e_τ mayor o igual que f_τ, considerando que e_τ está restringido por E_τ, es decir, nos da una medida de hasta qué punto es aceptable una fecha de finalización f_τ para la tarea τ. Su valor es 1 si $f_\tau \leq e_\tau^{inf}$, 0 si $f_\tau \geq e_\tau^{sup}$, y en caso contrario, su valor es mayor cuanto más cerca esté del último valor preferido para la fecha de entrega e_τ^{inf}.

La solución a este FCSP consiste en un conjunto de fechas de comienzo y de finalización para cada una de las tareas, y el grado en que satisface las restricciones del problema viene dado por 0 en caso de que violen alguna de las restricciones de precedencia o de no solapamiento, y en caso contrario por la siguiente expresión:

$$\mu_S(c) = \min_{\tau \in \mathcal{T}} \{\min \mu_{[I_i, +\infty)}(c_\tau), \min \mu_{(-\infty, E_i]}(f_\tau)\}$$

Las restricciones flexibles sobre las fechas de inicio y entrega de tarea se propagan sobre las de las operaciones correspondientes a dicha tarea, definiendo una ventana temporal para cada operación O_i, definida mediante las expresiones siguientes:

$$I_i = \widetilde{max}\{I_k \oplus t_k, \forall k \text{ tal que } O_k \text{ precede a } O_i\}$$
$$E_i = \widetilde{min}\{E_k \ominus t_k, \forall k \text{ tal que } O_i \text{ precede a } O_k\}$$

$\oplus$, $\ominus$, $\widetilde{max}$ y $\widetilde{min}$ son extensiones sobre argumentos borrosos de las correspondientes operaciones sobre argumentos precisos [22].

La solución a este FCSP consiste en la elección de las fechas de comienzo $c = \{c_1, ..., c_n\}$ de todas las operaciones, y el grado en que satisface las restricciones del problema viene dado por 0 en caso de que c viole alguna de las restricciones de precedencia o de no solapamiento, y en caso contrario por la siguiente expresión:

$$\mu_S(c) = min\{ \min_{i=1,...,n} \mu_{[I_i, +\infty)}(c_i), \min_{i=1,...,n} \mu_{(-\infty, E_i]}(c_i + t_i)\}$$

Es importante subrayar que la forma en que hemos proyectado las restricciones sobre las fechas de las tareas en restricciones sobre las fechas de las operaciones es posible mediante una agregación maximin, en particular, en virtud de la idempotencia del mínimo. Mediante otras agregaciones esta proyección no proporcionaría problemas equivalentes.

En problemas de decisión como el que aquí hemos presentado disponemos de un conjunto de variables para las que debemos escoger un valor adecuado. El conjunto borroso de valores admisibles se puede interpretar como una distribución de posibilidad que da una medida de lo adecuado que resulta un valor respecto a una restricción determinada. Así, el grado de posibilidad de un conjunto c de fechas para el comienzo de las operaciones del problema es el grado de preferencia de una elección.

5. La prioridad en FCSP

Una expresión de la prioridad de una restricción nos permite introducir un orden entre las restricciones de un CSP, de modo que una restricción puede ser violada si entra en conflicto con otras restricciones más prioritarias. Podemos asignar un grado de prioridad $Pr(R)$ a cada restricción R para indicar hasta qué punto es necesario que R se satisfaga. $Pr(R) = 1$ significa que R es una restricción completamente necesaria, mientras que $Pr(R) = 0$ significa que R es una restricción irrelevante en el problema, y por tanto puede ser violada sin que afecte a la validez de la solución.

Dubois y col. [12] proponen representar los diferentes grados de prioridad de una restricción en una escala V que podríamos interpretar como escala de violación, de manera que cuanto mayor es la prioridad de una restricción menor es la posibilidad de violarla. Podemos relacionar la escala de satisfacción S de una restricción con la escala de violación mediante una aplicación biyectiva c que invierte el orden, de modo que $S = c(V) = \{c(v), v \in V\}$, $c(0)$ es el mayor elemento de S, $c(1)$ el menor, y $v \leq v'$ en V supone que $c(v) \geq c(v')$ en S. Así, el valor que devuelve c del nivel de prioridad de una restricción $c(Pr(R))$ se interpreta como la medida en que dicha restricción puede ser violada. Por tanto, la restricción R se considera satisfecha al menos en grado $c(Pr(R))$ sea cual sea la solución, satisfaga o no R, es decir, la restricción R es satisfecha en grado $c(Pr(R))$ por aquellas soluciones que no satisfacen R, tal y como indica la figura 2 y se expresa a continuación:

$$\mu_{R'}(u_1, ..., u_n) = max\{c(Pr(R)), \mu_R(u_1, ..., u_n)\}$$

donde R' representa la restricción R priorizada en grado $Pr(R)$.

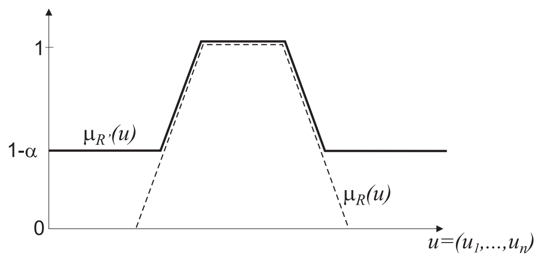

Fig. 2. Restricción priorizada en grado $Pr(R) = \alpha$ con $c(x) = 1 - x$ [12].

Esta asignación de prioridad a una restricción borrosa tiene una interpretación en la teoría de la posibilidad que trataremos de explicar a continuación [12]. Sabiendo que *"x es B"*, esto es, que $\pi_x = \mu_B$, la ocurrencia de eventos de la forma *"x es A"* (donde A se define de forma precisa) se puede evaluar por medio de medidas de posibilidad y necesidad [9]:

$$\Pi(A) = \sup_{u \in A} \pi_x(u) \qquad N(A) = \inf_{u \notin A} c(\pi_x(u))$$

$\Pi(A)$ nos dice en qué medida A es consistente con B, es decir, en qué medida existe algún valor en A compatible con el conocimiento representado por *"x es B"*. $N(A)$ nos dice en qué medida el conjunto borroso con función de pertenencia μ_B está contenido en A, es decir, hasta qué punto el conocimiento representado por *"x es B"* implica que *"x es A"*. Además, un evento A necesariamente ocurre si su contrario es imposible, y lo denotamos como $N(A) = c(\Pi(\overline{A}))$. En el caso de restricciones con prioridad, el grado de prioridad α de una restricción R representa una medida de la necesidad de satisfacer R. En el caso de que R sea precisa, la forma de la restricción R' que incorpora la prioridad es el resultado de resolver la ecuación funcional:

$$N(R) = \inf_{u \notin R} c(\mu_{R'}(u)) = \alpha$$

cuyo resultado es:

$$\mu_{R'}(u) = max\{c(\alpha), \mu_R(u)\} \qquad (1)$$

donde se ha escogido como solución la distribución menos específica (en caso contrario seríamos arbitrariamente precisos). Es interesante destacar que la desigualdad $N(R) \geq \alpha$ habría dado el mismo resultado.

En caso de que R sea una restricción borrosa con prioridad α, modelada mediante una distribución de posibilidad, la prioridad viene dada por la necesidad del evento borroso R:

$$N(R) = \inf_{u} \mathcal{I}(\mu_{R'}(u), \mu_R(u)) \geq \alpha$$

donde $\mathcal{I}$ representa un operador de implicación [31]: una función decreciente en el primer argumento, creciente en el segundo y que satisface $\mathcal{I}(0, x) = 1$ e $\mathcal{I}(1, x) = x$. Recordemos que $N(R)$ es el grado de inclusión en R de la restricción cuya forma ya incorpora la prioridad R'. Cuando $\alpha = 1$ la solución menos específica de la desigualdad es $\mu_{R'} = \mu_R$, cuando $\alpha = 0$ esta solución es $\mu_{R'}(u) = 1, \forall u$; y por otra parte, donde $\mu_{R'} \leq \mu_R$ entonces $\mathcal{I}(\mu_{R'}(u), \mu_R(u)) = 1$, y donde $\mu_{R'} > \mu_R$ entonces seleccionamos $\mathcal{I}(\mu_{R'}(u), \mu_R(u)) = c(\mu_{R'})$, de modo que la solución es la ya recogida en la expresión (1).

6. La incertidumbre en FCSP

La teoría de la posibilidad trata de modelar aquellas situaciones de incertidumbre provocadas por la presencia de información incompleta o contradictoria, habitual en un uso del lenguaje caracterizado por su vaguedad. Tal es el caso del ejemplo que exponíamos en la sección 2, donde *"x toma un valor pequeño"* definía una situación de incertidumbre, que tratábamos de modelar definiendo un grado de posibilidad $\mu_F(u)$ para cada elemento u del universo de discurso.

El problema de la representación de la información temporal que procede de la descripción realizada por un paciente es un problema caracterizado por su incertidumbre. Y su importancia estriba en que a partir de esa información se ha de poder realizar una interpretación que permita establecer un diagnóstico certero. Este problema ha sido abordado desde el formalismo FCSP en [1, 23] mediante el modelo FTCN (acrónimo en inglés para una Red de Restricciones Temporales Borrosas), extensión borrosa del modelo STP (Simple Temporal Problem) [6]. El propósito es disponer de una representación computacional que permita realizar tareas como la del análisis de la consistencia de la información introducida, la resolución de consultas o el razonamiento con información presente en la red [1, 4, 36]. Evidentemente, el modelo FTCN no se limita al dominio médico aunque éste da buena medida de su utilidad.

Una Red de Restricciones Temporales Borrosas (FTCN) $\mathcal{N} = \{\mathcal{X}, \mathcal{L}\}$ consiste en un conjunto de variables temporales $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, ..., X_n\}$ y un conjunto de restricciones temporales $\mathcal{L} = \{L_{ij}, 0 \leq i, j \leq n\}$ entre ellas. Cada una de las variables temporales representa una fecha desconocida asociada a un evento de los descritos por el paciente. Cada una de las restricciones viene definida por una distribución de posibilidad $\pi_{L_{ij}}(l)$ que representa la posibilidad de que la distancia temporal entre X_i y X_j sea precisamente l. $\pi_{L_{ij}}$ restringe conjuntamente los dominios de valores posibles de las fechas X_i y X_j, de modo que, en ausencia de otras restricciones, la asignación $X_i = t_i$ y $X_j = t_j$ es posible si se satisface $\pi_{L_{ij}}(t_j - t_i) > 0$.

Junto con el modelo FTCN también se proporciona un lenguaje que permite la expresión de información temporal y su proyección sobre la red. Esta proyección se realiza mediante operaciones sencillas de aritmética borrosa, tal y como ejemplifica la figura 3.

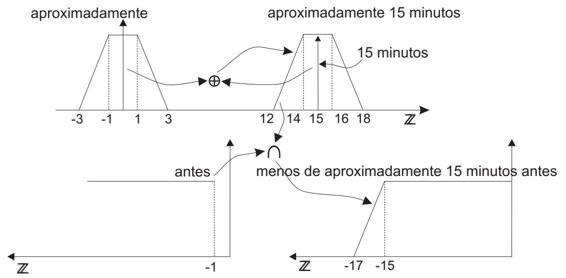

Fig. 3. Obtención de la distribución de posibilidad correspondiente al significado de la expresión *"menos de aproximadamente 15 minutos antes"*.

En el modelo FTCN se hace énfasis en la utilidad de la propagación de restricciones para el análisis de la consistencia de la información, imprescindible si (como es el caso) dicha información procede del uso natural del lenguaje, habitualmente plagado de información redundante y a menudo contradictoria. La propagación de restricciones permite la obtención de restricciones inducidas: hacer explícita aquella información implícita en la descripción inicial del problema (ver figura 4).

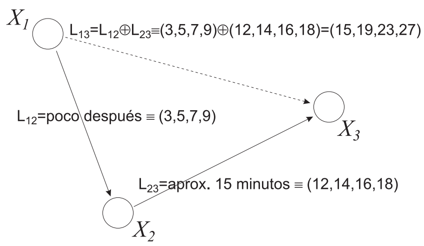

Fig. 4. Obtención de una restricción inducida L_{13} a partir de L_{12} y L_{23}.

Sin embargo, la propagación de restricciones borrosas tiene como consecuencia un aumento de la imprecisión: es fácil ver cómo tras la realización sucesiva de operaciones de aritmética borrosa aumenta la dispersión del resultado. El modelo FTCN resuelve este problema desde su misma definición, como red de restricciones, y así la imprecisión acumulada en la propagación de restricciones encadenadas se puede acotar mediante la definición de una restricción entre sus extremos, mecanismo de precisión habitual en el discurso humano. Este mecanismo se puede formalizar en lo que los modelos STP y FTCN denominan obtención de la red mínima: mediante la propagación y combinación sistemática de restricciones sobre pares de restricciones que comparten un nodo obtenemos de un modo eficiente una red equivalente a la red original y cuyas restricciones están definidas de la forma más precisa posible. Además, este algoritmo nos permite descubrir la presencia de inconsistencias en la información de partida.

Resulta interesante estudiar el problema de la obtención de soluciones en FCSP que hacen una representación de alguna forma de incertidumbre. Así, la existencia de más de una solución es típica en este tipo de problemas, cada una de las cuales viene valuada mediante un grado de incertidumbre que procede de restricciones que modelan la descripción de partida. En este sentido, nos alejamos del significado de solución en problemas cuyas restricciones modelan una idea de preferencia; se trata de problemas en los que la solución constituye una decisión sobre algunas variables de control del problema, y el disponer de más de una solución cabe interpretarlo como un margen a la capacidad de decisión. En cambio, en problemas en los que las restricciones modelan una incertidumbre la obtención de una sola solución resulta arbitrario, ya que con ser completamente posible, no tiene por qué ser la real [19]. Así todo, se puede obtener una solución particular no como fin sino como medio: como una forma de desborrosificar la FTCN con el fin de ordenar temporalmente aquellos eventos descritos en el problema, lo que sin duda tiene utilidad en aplicaciones como el diagnóstico [24].

Quizás el principal uso de este tipo de FCSP sea como soporte en la representación de la base de conocimiento, estática y dinámica, de un problema. Como tal, la principal operación que debe soportar es la de resolución de consultas. En particular, evaluar la medida en que se satisface una determinada relación C entre hechos representados en la red. Dicha relación se puede evaluar, desde la teoría de la posibilidad, mediante los valores de posibilidad y necesidad. Así, $\Pi(C,\mathcal{N})$ nos da una medida de la compatibilidad entre C y la información almacenada en la red $\mathcal{N}$. C se puede transformar en la correspondiente forma normal disyuntiva $\Pi(C,\mathcal{N}) = \Pi(C_1 \vee ... \vee C_n)$, donde cada fórmula C_k es una conjunción de relaciones temporales, $C_k = C_k^1 \wedge ... \wedge C_k^{m_k}$. La teoría de la posibilidad nos dice que $\Pi(C,\mathcal{N}) = \Pi(C_1^1 \wedge ... \wedge C_1^{m_1}) \vee ... \vee \Pi(C_n^1 \wedge ... \wedge C_n^{m_n})$, y cada conjunción de relaciones se traduce en una conjunción de restricciones $\pi_{ij}^{C_h}$ entre nodos de la red. La expresión que nos devuelve el valor de esta compatibilidad es:

$$\Pi(C,\mathcal{N}) = \underset{h}{max}\ \underset{i,j}{min}\{\underset{l}{max}\, min\{\pi_{ij}^{C_h}(l), \pi_{L_{ij}}(l)\}\}$$

$N(C,\mathcal{N})$ nos da una medida del grado en que la información almacenada en la red implica a la relación C, y podemos calcularlo como $N(C,\mathcal{N}) = 1 - \Pi(\overline{C})$. Se puede ir un paso más allá mediante la formalización de una lógica temporal imprecisa compatible con una representación de la información temporal realizada mediante el modelo FTCN. Podemos encontrar distintas propuestas en [4, 5, 21].

6.1. Incertidumbre y preferencia en FCSP

Mediante el formalismo FCSP podemos modelar problemas en los que junto con algunas variables de decisión, cuyo valor está restringido por algún criterio de preferencia, disponemos de alguna información sobre ciertos parámetros cuyo valor no se conoce con certeza [12]. Tomemos por caso un problema de secuenciación de tareas en el que la duración de una operación *"puede durar aproximadamente entre cinco y diez minutos"*. O el caso de un sistema de supervisión de pacientes que realiza el consejo terapéutico de administrar determinado fármaco *"más o menos media hora después de la aparición de los primeros síntomas"*.

Supongamos que en un problema de estas características tenemos una restricción precisa $R_{X_iY_j}$ que liga una variable de decisión X_i y un parámetro mal conocido Y_j. Puesto que no conocemos el valor real de Y_j, sino una distribución de valores posibles π_{Y_j}, debemos encontrar un valor u_i que satisfaga $R_{X_iY_j}$, cualquiera que sea el valor de Y_j. Así, u_i satisface $R_{X_iY_j}$ en grado igual al de necesidad del evento $u_j \in R = Proy(R_{X_iY_j})_{X_i=u_i}$. Podemos interpretar una restricción de este tipo como una restricción unitaria $\mu_{R_{X_i}}$ tal que,

$$\mu_{R_{X_i}}(u_i) = N(u_j \in R) = \underset{u_j \notin R}{inf}\ c(\pi_{Y_j}(u_j))$$

Este grado de necesidad nos da una medida de inclusión del conjunto de valores posibles de Y_j en el conjunto $Proy(R_{X_iY_j})_{X_i=u_i}$. El grado de satisfacción es nulo si existe un valor u_j completamente posible de Y_j, tal que el par $(X_i, Y_j) = (u_i, u_j)$ viola la restricción $R_{X_iY_j}$; y es uno si son imposibles todos los valores u_j de X_j, tal que $(X_i, Y_j) = (u_i, u_j)$ viola $R_{X_iY_j}$.

En el caso en que $R_{X_iY_j}$ sea una restricción borrosa, el grado de satisfacción de $X_i = u_i$ viene dado por la expresión:

$$\mu_{R_{X_i}}(u_i) = N(u_j \in R) = \\ = \underset{u_j}{inf}\ max\{\mu_R(u_j), c(\pi_{Y_j}(u_j))\}$$

La inclusión que modela esta satisfacción es más estricta que la que modela el grado de prioridad de una restricción borrosa: $N(u_j \in R) = 1$ requiere que el soporte de π_{Y_j} sea subconjunto del núcleo de $\mu_R(u_j)$ (=$\{u_j, \mu_R(u_j) = 1\}$).

Dubois y col. [12] dan un paso más allá llevando la incertidumbre al conjunto de las restricciones que definen un FCSP, esto es, intentando modelar la falta de certeza de que un conjunto de restricciones sean las restricciones reales del problema.

7. La similitud en FCSP

La semántica de conjunto borroso por la que el grado de pertenencia se interpreta como grado de similitud fue la primera en aparecer en la bibliografía, y está vinculada a aplicaciones en clasificación de patrones, donde $\mu_F(u)$ es el grado de proximidad de u a aquellos elementos que representan un prototipo de F [29]. Este tipo de aplicaciones es muy típico en aquellos sistemas que realizan una abstracción del entorno que perciben a partir del conjunto de datos adquiridos, lo que les permite realizar una interpretación de dicho entorno.

Con esta idea en mente, Félix y col. proponen en [15, 18] el modelo de Perfiles Temporales Borrosos (FTP), con el fin de identificar sobre la evolución de un parámetro ciertas morfologías de interés en la tarea de interpretación. Un FTP se define como una red de restricciones entre un conjunto de puntos especialmente significativos sobre la evolución de un determinado parámetro. Dichas restricciones fijan, por un lado, la distancia temporal, incremento en valor y pendiente entre cada par de dichos puntos y, por otro lado, permiten modelar el comportamiento del fragmento de evolución comprendido entre ellos.

Cada punto significativo $X_i =< V_i, T_i >$ está definido como un par de variables: V_i representa un valor desconocido del parámetro físico, y T_i representa un instante de tiempo desconocido. Una restricción $R_{ij} =< D_{ij}, L_{ij}, M_{ij} >$ sobre dos puntos significativos X_i y X_j está formada por un incremento borroso D_{ij}, que restringe los dominios de los valores posibles de las variables V_i y V_j; una duración borrosa L_{ij}, que restringe los dominios de los valores posibles de las variables T_i y T_j y una pendiente borrosa M_{ij}, que restringe conjuntamente los dominios de los valores posibles de las variables V_i, V_j, T_i y T_j. Cada una de las restricciones está representada mediante una distribución de posibilidad y permiten modelar las relaciones entre un conjunto de eventos de señal de especial significado para el usuario experto, y presentes en sentencias del tipo de: *"poco después la temperatura es mucho más alta"*.

Un Perfil Temporal Borroso (FTP) $\mathcal{N} = \{\mathcal{X}, \mathcal{R}\}$ se define como un conjunto finito de puntos significativos $\mathcal{X} = \{X_0, X_1, ..., X_n\}$ y un conjunto finito de restricciones $\mathcal{R} = \{< D_{ij}, L_{ij}, M_{ij} >,\ 0 \leq i, j \leq n\}$ entre dichos puntos (Figura 5).

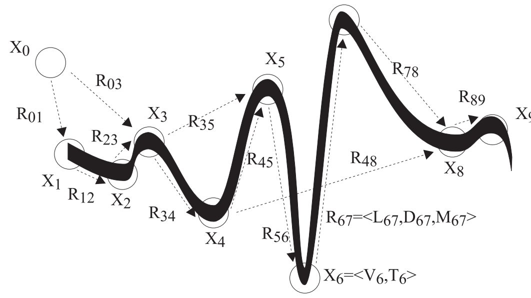

Fig. 5. Ejemplo de FTP e idea intuitiva de la evolución que se desea representar.

Además, el lenguaje natural permite la expresión de un conjunto de descripciones en las que se matiza la forma en que tiene lugar la evolución entre dos puntos significativos, como es el caso de *"... a lo largo de los siguientes quince minutos la temperatura sube moderadamente diez grados"* o *"durante las dos últimas horas la temperatura es alta"* [17]. Con el fin de incorporar la representación de la evolución entre cada dos puntos significativos, se modela un conjunto ampliable de evoluciones asociadas a diferentes semánticas de tramo, de modo que se pueda calcular la compatibilidad entre un descriptor del tramo y un fragmento de la evolución temporal de una variable física. Este descriptor del tramo se modela mediante un conjunto borroso S_{ij} que proporciona una representación del significado de un episodio de señal. Un paso más es la incorporación de una representación de la cuantificación en episodios de señal [2], que permite modelar el significado de expresiones del tipo de *"la temperatura aumenta durante la mayor parte de la crisis"*.

Formalmente, la solución de un FTP se define a partir de la asignación $A_i =< v_i, t_i >$ a cada uno de sus puntos significativos X_i. La compatibilidad de una pareja de asignaciones A_i y A_j con las restricciones del tramo R_{ij} viene dada por la expresión:

$$\pi_{R_{ij}} = min\{\pi_{D_{ij}}(v_j - v_i), \pi_{L_{ij}}(t_j - t_i), \pi_{M_{ij}}(m_{ij})\}$$

siendo $m_{ij} = (v_j - v_i)/(t_j - t_i)$. El modelo proporciona un procedimiento basado en un árbol de búsqueda con tantos niveles como puntos significativos, y que se ramifica en las posibles asignaciones de muestras de la señal a cada uno de ellos. El fragmento de señal comprendido entre cada par de asignaciones se equipara con la función de pertenencia $\mu_{S_{ij}}$ que modela el significado del episodio correspondiente. El procedimiento opera de un modo incremental, según la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\mu^{\mathcal{N}}_{i_1,...,i_h}(A_0, A_{i_1}, ..., A_{i_h}) &= \\ &= \min_{i_j, i_k} \{\pi_{R_{i_j i_k}}(A_{i_j}, A_{i_k}), \mu_{S_{i_j i_k}}(A_{i_j}, A_{i_k})\}\end{aligned}$$

La adición de determinadas heurísticas que ponen su atención en la presencia de determinados rasgos especialmente significativos alivian la complejidad computacional del procedimiento, permitiendo utilizarlo en determinadas aplicaciones en tiempo real [27].

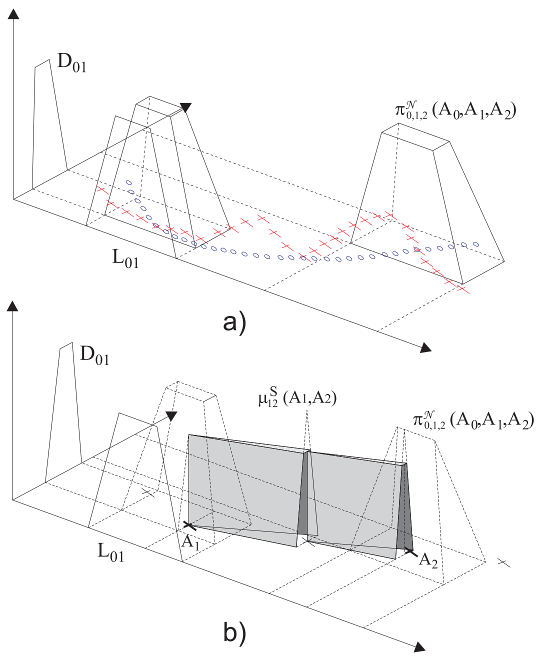

Fig. 6. En esta figura se muestra la representación de dos semánticas de evolución en el modelo PTB. En a) se modela la semántica de sentencias del tipo "algo más tarde la temperatura es más alta", donde no importa el modo en que tiene lugar la transición entre los estados extremos. En b) se modela la semántica de la sentencias del tipo "a lo largo de los siguientes minutos, la temperatura sube ligeramente".

Respecto a la agregación en el cálculo de soluciones, decir que la aplicación del modelo FTP al reconocimiento de morfologías hace de la aproximación maximin una alternativa muy pesimista, ya que una pequeña desviación de la trayectoria sugerida en el FTP puede dar como resultado una equiparación nula. Por tanto, puede ser aconsejable introducir agregaciones aditivas que introduzcan alguna forma de compensación.

Por otra parte, y volviendo a la discusión sobre la semántica de las restricciones, el modelo FTP supone un esfuerzo por tratar de modelar aquellas sentencias del lenguaje natural que de alguna manera permiten describir la forma en que un parámetro evoluciona en el tiempo [16]. En ese sentido, nos encontramos con una semántica de incertidumbre que puede corresponder: (1) a la descripción imprecisa de una evolución en particular; o bien, (2) a una generalización realizada por quien ha observado repetidas veces lo que estima que es la misma evolución. Esto último está relacionado con la obtención de una medida de incertidumbre a partir de la frecuencia de situaciones observadas de un modo impreciso [8]. En cualquier caso, el lenguaje natural como punto de partida supone una dificultad en proporcionar un prototipo, lo que permitiría definir una morfología borrosa mediante alguna medida de distancia. En nuestro caso, podemos interpretar la función de pertenencia que representa el FTP como una distribución que asigna a cada evolución precisa un grado de posibilidad de ser un prototipo de la morfología descrita. La situación es distinta desde el punto de vista de la aplicación del modelo FTP, que utiliza una función de pertenencia para traducir información numérica precisa en una etiqueta borrosa. Así, dado un fragmento u de evolución de un parámetro físico, comprendido entre las asignaciones a los puntos significativos extremos del perfil, $\mu^{\mathcal{N}}(u)$ evalúa la medida en que dicho fragmento se puede denominar $\mathcal{N}$.

8. Conclusiones

Hemos presentado en este trabajo el formalismo de los Problemas de Satisfacción de Restricciones Borrosas (FCSP) desde un punto de vista semántico. La interpretación del significado del grado de pertenencia resulta fundamental para una correcta utilización de las herramientas que la teoría de conjuntos borrosos dispone para el procesamiento de la información, que como hemos visto, es diferente según se trate de incertidumbre, preferencia o similitud, las tres semánticas que solemos encontrar detrás de una función de pertenencia [14].

No hemos pretendido realizar un estudio completo sobre FCSP. Muchas cuestiones no han encontrado respuesta en este trabajo, como es el carácter no monótono de los FCSP, o los procedimientos de propagación de restricciones. Hemos intentando presentar algunas nociones básicas sobre la forma en que los conjuntos borrosos permiten modelar algunas restricciones flexibles que aparecen en problemas que encuentran una solución natural mediante el formalismo CSP. Y hemos ilustrado algunos de los significados típicos de la función de pertenencia mediante algunos ejemplos significativos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por la Comisión Interministerial para la Ciencia y la Tecnología (CICyT) a través del proyecto TIC2000-0873-C02.

Referencias

[1] S. Barro, R. Marín, J. Mira, A. Patón, A model and a language for the fuzzy representation and handling of time. Fuzzy Sets and Systems, **61**, 153–175, 1994.

[2] S. Barro, P. Félix, P. Cariñena, A. Otero, Extending Fuzzy Temporal Profile model for dealing with episode quantification. En *Systematic Organisation of Information in Fuzzy Systems* (Ed. P. Melo-Pinto y col.), NATO Science Series, 205–228, 2003.

[3] S. Bistarelli, U. Montanari and F. Rossi, Semiring-based constraint satisfaction and optimization. *Journal of the ACM*, 44(2):201-236, 1997.

[4] M.A. Cárdenas, R. Marín, I. Navarrete, M. Balsa, Fuzzy temporal constraint logic: A valid resolution principle. *Fuzzy Sets and Systems*, **117**(2), 231–250, 2001.

[5] M.A. Cárdenas, R. Marín, Syntax and semantics for a fuzzy temporal constraint logic. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, **36**, 357–380, 2002.

[6] R. Dechter, I. Meiri, J. Pearl, Temporal constraint networks. *Artificial Intelligence*, **49**, 61–95, 1991.

[7] R. Dechter, *Constraint Processing.* Morgan Kaufmann, 2003.

[8] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy sets and statistical data, *European Journal of Operatinal Research*, **25**, 345–356, 1986.

[9] D. Dubois, H. Prade, *Possibility Theory: an approach to computerized processing of uncertainty.* Plenum Press, 1988.

[10] D. Dubois, H. Fargier, H. Prade, The calculus of fuzzy restrictions as a basis for flexible constraint satisfaction. *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1131–1136, 1993.

[11] D. Dubois, H. Fargier, H. Prade, Fuzzy constraints in job-shop scheduling. *Journal of Intelligent Manufacturing*, **6**, 215–234, 1995.

[12] D. Dubois, H. Fargier, H. Prade, Possibility theory in constraint satisfaction problems: handling priority, preference and uncertainty. *Applied Intelligence*, **6**, 287–309, 1996.

[13] D. Dubois, H. Fargier, H. Prade, Refinements of the maximin approach to decision-making in a fuzzy environment. *Fuzzy Sets and Systems*, **81**, 103–122, 1996.

[14] D. Dubois, H. Prade, The three semantics of fuzzy sets. *Fuzzy Sets and Systems*, **90**, 141–150, 1997.

[15] P. Félix, S. Barro, R. Marín, M.J. Taboada y A. Engel, Patrones temporales borrosos en la supervisión de pacientes. En *Actas del V Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*, 321–326, 1995.

[16] P. Félix, S. Fraga, R. Marín, S. Barro, Linguistic representation of fuzzy temporal profiles. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge–Based Systems*, **7**(3), 243–256, 1999.

[17] P. Félix, S. Barro, A fuzzy model for the representation and recognition of linguistically described trends. *Intelligent Data Analysis*, **5**, 503–529, 2001.

[18] P. Félix, S. Barro, R. Marín, Fuzzy constraint networks for signal pattern recognition. *Artificial Intelligence*, Special Issue on Fuzzy Logic, (en prensa), 2003.

[19] H. Fargier, J. Lang, T. Schiex, Mixed constraint satisfaction: a framework for decision problems under incomplete knowledge. *Proceedings of AAAI/IAAI Conference*, 175–180, 1996.

[20] E.C. Freuder, R. Wallace, Partial constraint satisfaction. *Artificial Intelligence*, **58**, 21–71, 1992.

[21] L. Godo, L. Vila, A temporal reasoning system based on fuzzy temporal constraints. En actas del IV Congreso Español sobre Tecnología y Lógica Fuzzy, ESTYLF'94, 43–48, 1994.

[22] A. Kaufmann, M.M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic*. Van Nostrand Reinhold, 1985.

[23] R. Marín, S. Barro, A. Bosch, J. Mira, Modelling the representation of time from a fuzzy perspective, *Cybernetics and Systems*, **25**(2), 207–215, 1994.

[24] R. Marín, M.A. Cárdenas, M. Balsa, J.L. Sánchez, Obtaining solutions in fuzzy constraint networks. *International Journal of Approximate Reasoning*, **16**(3-4), 261–288, 1997.

[25] H. Montanari, Networks of constraints: fundamental properties and application to picture processing. *Information Science*, **7**, 95–142, 1974.

[26] H. Moulin, *Axioms of cooperative decision making*, Cambridge University Press, 1988.

[27] A. Otero, P. Félix, C.V. Regueiro, M. Rodríguez, S. Barro, A model to perform knowledge-based temporal abstraction over multiple signals. *TIME'03*, 2003.

[28] A. Rosenfeld, R.A. Hummel, S.W. Zucker, Scence labeling by relaxation operations. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, **6**, 420-433, 1976.

[29] E. Ruspini, On the semantics of fuzzy logic. *International Journal of Approximate Reasoning*, **5**, 45–88, 1991.

[30] Z. Ruttkay, Fuzzy Constraint Satisfaction. *Third IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, 1263–1268, 1994.

[31] E. Trillas, Ll. Valverde, On mode and implication in approximate reasoning. En *Approximate Reasoning in Expert Systems* (Ed. M.M. Gupta y col.), North-Holland, 157–166, 1985.

[32] E. Tsang, *Foundations of Constraint Satisfaction*, Academic Press, 1993.

[33] R.R. Yager, Constraint satisfaction using soft constraints. CP99 Post-conference workshop on modelling and solving soft constraints, 1999.

[34] L.A. Zadeh, Calculus of fuzzy restrictions. En *Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Processes* (Ed. L.A. Zadeh y col.), Academic Press, 1–39, 1975.

[35] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, **1**, 3–28, 1978.

[36] L. Vila, L. Godo, On Fuzzy Temporal Constraint Networks. *Mathware and Soft Computing*, **3**, 315–334, 1994.